

Aufgabe 4.1 Schreiben Sie ein Programm in einer Sprache Ihrer Wahl, das die Kehrwerte $1/n$ für $n \geq 1$ addiert. Brechen Sie ab, wenn sich die Summe nicht mehr ändert. Vergleichen Sie die “Grenzwerte” Ihrer harmonischen Reihe für verschiedene Fließkommalängen, beispielsweise `float`, `long`, `long double` in C-Dialekten.

Aufgabe 4.2 Beweisen Sie die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen,

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), & \tan(x+y) &= \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}. \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \end{aligned}$$

Benutzen Sie dabei für Sinus und Kosinus die Formel $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

Aufgabe 4.3 Berechnen Sie die folgenden Reihen:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{5^n}, \quad (b) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-3}}, \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2n}}, \quad (d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}.$$

Benutzen Sie für (d) die bekannten Formeln $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = e$ und $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$.

Aufgabe 4.4 Finden Sie eine Formel für die endlichen Summen

$$s_k = \sum_{n=2}^k \frac{1}{(n-1)n}.$$

Benutzen Sie diese Formel, um die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ zu zeigen. Warum greift das Quotientenkriterium hier nicht?

Aufgabe 4.5 Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n} (x-1)^n, \quad b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} x^n, \quad c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{5^n} (x+4)^n.$$

Geben Sie einen Punkt $x \in \mathbb{R}$ an, für den alle drei Potenzreihen konvergieren.