

Aufgabe 5.1 Leiten Sie aus den Potenzgesetzen $b^{x+y} = b^x \cdot b^y$ und $(b^x)^y = b^{xy}$ die folgenden Logarithmengesetze her:

$$\begin{aligned} \log_b(xy) &= \log_b(x) + \log_b(y), & \log_b\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_b(x) - \log_b(y), \\ \log_b(x^r) &= r \cdot \log_b(x), & \log_b(x) &= \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5.2 Ermitteln Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen:

- (a) $f(x) = \log_2(x + 14) + \log_2(x + 2) - 6$,
- (b) $f(x) = (\ln x)^2 - \frac{9}{4} \ln x - 7$,
- (c) $f(x) = 4^{x-2} - 17 \cdot 2^{x-4} + 1$,
- (d) $f(x) = |\sin 2x| - \frac{1}{2}$,
- (e) $f(x) = \sin x + \cos x - \sqrt{2}$.

Aufgabe 5.3 Berechnen Sie die Terme bis zum Grad 5 der Potenzreihe für $1/\cos(x)$ aus der bekannten Entwicklung $\cos(x) = \sum_n (-1)^n x^{2n}/(2n)!$. Bestimmen Sie damit die Terme bis zum Grad 5 für $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$.

Aufgabe 5.4 Zeichnen Sie die folgenden Funktionen ($x \in [-4, 4]$) und berechnen Sie jeweils den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

- (a) $f(x) = 2^{|x|/x}$,
- (b) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$,
- (c) $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Aufgabe 5.5 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

- (a) $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(2+a)^3 - 2^3}{a}$,
- (b) $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+a} - \frac{1}{2}}{a}$,
- (c) $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+a} - \sqrt{2}}{a}$.

Führen Sie die Rechnung nun durch, indem Sie in (a)–(c) jede 2 durch x ersetzen.