

Aufgabe 6.1 Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt x^* differenzierbar sind:

(a) $f(x) = 5 - |x + 3| - |x|$ in $x^* = -3$

(b) $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$ in $x^* = \pi$

(c) $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} + x) & \text{für } x < 0 \\ 1 + x^2 & \text{sonst} \end{cases}$ in $x^* = 0$

Aufgabe 6.2 Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$:

(a) $y = \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-1}}{\sqrt{n-1}} + \frac{x^{n-2}}{\sqrt[3]{n-2}}$

(b) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

(c) $y = \left(\frac{x^2 + 7x}{(x-4)^4} \right)^9$

(d) $y = \frac{1}{2} \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right) - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \sin 2x \cos x^2$

(e) $y = \ln \sqrt{1 + \sin^2 x}$

(f) $y = e^{(ax^3+b)^2}$

Aufgabe 6.3 Zeigen Sie, dass die Funktion $y: D \rightarrow \mathbb{R}$, $y(x) = \frac{x - e^{x^2}}{2x^2}$ der Differentialgleichung $x \cdot y' + 2y = e^{-x^2} + \frac{1}{2x}$ genügt.

Aufgabe 6.4 Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{1-x}$ auf zwei Weisen:

(a) Mit den Ableitungsregeln.

(b) Durch Ableitung der Potenzreihe für $f(x)$.

Zeigen Sie, dass die Funktionen in (a) und (b) übereinstimmen.

Aufgabe 6.5 Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

(a) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

(b) $f(x) = a^{\tan x} + \tan(a^x)$