

Aufgabe 10.1 Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f(x)$ jeweils eine Stammfunktion, indem Sie $f(x)$ in Partialbrüche zerlegen.

$$(a) f(x) = \frac{3x^2 - x}{(x^2 + 1)(x - 2)}$$

$$(b) f(x) = \frac{x^5 - x^4 - 8}{x^3 - 4x}$$

$$(c) f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 6x - 2}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}$$

Aufgabe 10.2 (a) Geben Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion an:

$$\frac{5x^7 - 10x^6 + 39x^5 - 39x^4 + 98x^3 - 33x^2 + 76x + 44}{(x^2 + 2)^2(x^2 + 4)(x - 1)(x - 3)}.$$

Setzen Sie in den Ansatz sechs x -Werte ein und benutzen Sie das Gauß-Verfahren.

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $\frac{1}{(x^2 + 1)^2}$ mit partieller Integration.

Aufgabe 10.3 Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^b x^3 dx$ durch einen Grenzwertprozess mit Zwischensummen.

Aufgabe 10.4 Für fixierte $a, b > 0$ definiert die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

eine Ellipse (mit den Halbachsen a und b).

(a) Zeichnen Sie ein Bild für $a = 2$, $b = 1$.

(b) Parametrieren Sie den oberen Zweig der Ellipse ($y \geq 0$) durch eine Funktion $f(x)$.

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse durch eine Integration.

Aufgabe 10.5 Bestimmen Sie den Inhalt der zwischen den Kurven $f(x) = x^3 - 7x + 6$ und $g(x) = -x^2 - x + 6$ eingeschlossenen Fläche. (Beginnen Sie wie immer mit einer Skizze.)