

Aufgabe 11.1 Wir definieren die Funktion $\Gamma: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ durch uneigentliche Integrale

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(Die Konvergenz der Integrale müssen Sie nicht nachweisen.) Zeigen Sie:

(a) $\Gamma(1) = 1$

(b) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Folgern Sie daraus $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 11.2 Zeigen Sie mit dem Integraltest, dass die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log(n)}$ divergiert.

Aufgabe 11.3 Berechnen Sie den Umfang eines Kreises vom Radius r , indem Sie die Bogenlänge der Funktion $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ mit $x \in [-r, r]$ bestimmen.

Aufgabe 11.4 Lösen Sie diese Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen:

(a) $y' = \frac{xy}{x+1}$

(b) $(1+x^2)y' + xy = 0$

(c) $y' = \frac{y}{x(x+1)}$

Aufgabe 11.5 Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $y' = 3x^2 e^{-y}$ mit $y(0) = 1$

(b) $xy' = y^2 + 1$ mit $y(1) = 1$

(c) $xy' = y^2 - 1$ mit $y(1) = 0$