

## Mathematik II für Informatiker – SS 2018

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

PROF. DR. DAVID PLOOG,

DR. MICHAEL HÖDING

## Aufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur

**Aufgabe 1** (a) Berechnen Sie  $\varphi(792)$ .

(b) Ist 9 modulo 1831 invertierbar? Wenn ja, was ist das Inverse?

**Lösung:** (a) Zuerst Primfaktorzerlegung:  $792 = 2 \cdot 396 = 2^2 \cdot 198 = 2^3 \cdot 99 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$ , und dann (mit  $\varphi(p^l) = p^{l-1}(p-1)$  für jeden Faktor)

$$\varphi(792) = \varphi(2^3 \cdot 3^2 \cdot 11) = \varphi(2^3) \cdot \varphi(3^2) \cdot \varphi(11) = 3(2-1)^2 \cdot 3(3-1) \cdot (11-1) = 180.$$

(b) Ja. (Diese Antwort ist ohne weitere Rechnung möglich, denn 9 und 1831 sind teilerfremd: die Quersumme von 1831 ist  $1 + 8 + 3 + 1 = 13$ .) Die Berechnung des Inversen erfolgt mit dem Euklidischen Algorithmus: zunächst  $1831 = 9 \cdot 203 + 4$ ,  $9 = 2 \cdot 4 + 1$  und dann rückwärts

$$1 = 9 - 2 \cdot 4 = 9 - 2(1831 - 9 \cdot 203) = 9 \cdot 407 - 2 \cdot 1831;$$

das Inverse ist also (die Restklasse von)  $407 \in \mathbb{Z}/1831$ .

**Aufgabe 2** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - 2}{3n^2 + 1}$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n+1)} - n$

(c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x^3}$

**Lösung:** (a)  $\frac{1}{3}$  ( $n^2$  kürzen); (b)  $\frac{1}{2}$  (mit  $\sqrt{n(n+1)} + n$  erweitern); (c)  $\frac{3}{2}$  (geometrische Reihe); (d)  $\frac{1}{6}$  (wiederholt l'Hospital oder Potenz/Taylor-Reihe von  $\sin$ ).

**Aufgabe 3** Berechnen Sie die Ableitung von  $f(x) = x^3$  im Punkt  $x = 2$  mit der Definition als Differentialquotient.

**Lösung:**

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 12 + 6h + h^2 = 12. \end{aligned}$$

**Aufgabe 4** Welche Ausmaße besitzt ein Quader mit quadratischer Grundfläche und einer Oberfläche von  $150 \text{ m}^2$ , der größtmögliches Volumen hat?

**Lösung:** Ein Quader mit den Seitenlängen  $a, a, b$  hat das Volumen  $a^2b$  und die Oberfläche  $A = 2(a^2 + ab + ab) = 150$ . Es folgt  $b = \frac{A - 2a^2}{2a}$  und damit kann das Volumen als Funktion von  $a$  dargestellt werden:  $V(a) = a^2(A - 2a^2)/(2a) = \frac{A}{2}a - a^3$ . Dann  $V'(a) = \frac{A}{2} - 3a^2 = 0 \implies a = \sqrt{A/6} = 5$  und  $b = 10$ .

**Aufgabe 5** Approximieren Sie  $\sqrt{6}$  mit der Taylor-Entwicklung von  $\sqrt{x}$  bis Grad 3.

**Lösung:** Taylor-Polynom dritten Grades von  $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$  mit  $x = 4$  und  $h = 2$ :

$$\begin{aligned} f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{6} &= x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}h - \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4}\frac{h^2}{2} + \frac{3x^{-\frac{5}{2}}}{8}\frac{h^3}{6} \\ &= 2 + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{8}{6} = \frac{128 + 32 - 4 + 1}{64} = \frac{157}{64}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 6** Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion  $f(x) = (1 + \sqrt[3]{x})^{-1}$  und von den Geraden  $y = 0$  und  $x = 0$  und  $x = 1$  begrenzt wird.

**Lösung:** Zu berechnen ist das Integral

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^{1/3}} &= \int_1^2 \frac{3(u-1)^2}{u} du = \int_1^2 \left( 3u - 6 + \frac{3}{u} \right) du \\ &= \left[ \frac{3}{2}u^2 - 6u + 3 \ln u \right]_1^2 = \frac{3}{2}(4-1) - 6(2-1) + 3 \ln 2 = -\frac{3}{2} + 3 \ln 2. \end{aligned}$$

mit  $u = 1 + x^{1/3}$ ,  $u' = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ , also  $du = \frac{1}{3}x^{-2/3}dx$  und  $dx = 3x^{2/3} = 3(u-1)^2$ .

**Aufgabe 7** Lösen Sie das Anfangswertproblem  $y' \cdot y^2 = x$  mit  $y(0) = 1$ .

**Lösung:** Trennung der Variablen:  $\int y^2 dy = \int x dx \implies \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}x^2 + C \implies y = (\frac{3}{2}x^2 + C_1)^{1/3}$  und wegen  $y(0) = 1$  ist  $C_1 = 1$  und  $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + 1}$ .

**Aufgabe 8** Berechnen Sie eine Stammfunktion von  $\frac{2x^4 - 7x^3 - x^2 + 3}{x^3 - 4x^2 + x - 4}$ .

**Lösung:** Das Verfahren zur Partialbruchzerlegung:

Schritt 1: Polynomdivision:  $(2x^4 - 7x^3 - x^2 + 3) : (x^3 - 4x^2 + x - 4) = 2x + 1$  mit Rest  $x^2 + 7x + 7$ .

Schritt 2: Faktorisieren des Nenners:  $x^3 - 4x^2 + x - 4$  ist ein normiertes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten  $\implies$  testen als Nullstellen die Teiler des konstanten Terms  $-4$ . Wegen  $4^3 - 4 \cdot 4^2 + 4 - 4 = 0$  ist  $x - 4$  ein Faktor. Eine Polynomdivision gibt  $(x^3 - 4x^2 + x - 4) : (x - 4) = x^2 + 1$ .

Schritt 3: Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz

$$\frac{x^2 + 7x + 7}{(x - 4)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 4} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}.$$

Erhalten ein lineares Gleichungssystem für  $A, B, C$ , entweder durch Bilden gemeinsamer Nenner ( $A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 4) = x^2 + 7x + 7 \implies A - 4C = 7, -4B + C = 7, A + B = 1$ ) oder durch Einsetzen von drei  $x$ -Werten (zum Beispiel  $x = 0 : -7/4 = -A/4 + C$ ;  $x = 1 : -15/6 = -A/3 + B/2 + C/2$ ;  $x = -1 : -1/10 = -A/5 - B/2 + C/2$ .) Es ist  $A = 3, B = -2, C = -1$ .

Schritt 4: Stammfunktion

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^4 - 7x^3 - x^2 + 3}{x^3 - 4x^2 + x - 4} dx &= \int 2x + 1 + \frac{3}{x - 4} - \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= x^2 + x + 3 \ln|x - 4| - \ln(x^2 + 1) - \arctan x + C. \end{aligned}$$

**Aufgabe 9** Ist die Menge  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, y \geq (x^2 + 2)e^x\}$  konvex?

**Lösung:** Diese Menge sind die Punkte auf und oberhalb des Graphen der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x(x^2 + 2)e^x$ . Also ist die Menge konvex  $\iff$  die Funktion  $f$  ist konvex. Dazu berechnen wir die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(x^2 + 2 + 2x) \\ f''(x) &= e^x(x^2 + 2 + 2x + 2x + 2) = e^x(x^2 + 4x + 4) = e^x(x + 2)^2. \end{aligned}$$

Wegen  $f''(x) \geq 0$  für alle  $x \in D(f) = \mathbb{R}$  ist  $f$  konvex.

**Aufgabe 10** Berechnen Sie für die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x \sin(x - y)$  den Gradienten in allen Punkten von  $\mathbb{R}^2$  sowie alle Extremstellen.

**Lösung:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(x - y) + x \cos(x - y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x \cos(x - y).$$

Damit  $\text{grad}f(x, y) = (\sin(x - y) + x \cos(x - y), -x \cos(x - y))$ .

$(x, y)$  lokale Extremstelle  $\iff$  Tangentialebene für  $f$  in  $(x, y)$  waagrecht  $\iff \text{grad}f(x, y) = (0, 0) \iff \sin(x - y) + x \cos(x - y) = 0, -x \cos(x - y) = 0 \iff \sin(x - y) = x \cos(x - y) = 0 \iff x = 0, \sin(y) = 0$ .

(Denn  $\sin(t)$  und  $\cos(t)$  sind für kein  $t$  beide 0.)

Lokale Extremstellen sind also  $(0, k\pi)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ .