Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1

Betrachten Sie das Polynom $p = x^5 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Sei $\alpha = \sqrt[5]{2}$ und $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$ eine fünfte Einheitswurzel. Zeigen Sie, dass ein Körperautomorphismus von $\mathbb{Q}(\alpha, \omega)$ existiert, der α fixiert und die restlichen Wurzeln von p zyklisch vertauscht.

Aufgabe 1.2

Sei $f \in K[x]$ ein Polynom mit Koeffizienten einem Körper K. Zeigen Sie, f ist irreduzibel genau dann, wenn das Ideal $\langle f \rangle \subset K[x]$ ein Primideal ist.

Aufgabe 1.3

Zeigen Sie, dass $f = x^4 + 1$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$ und $\mathbb{Q}[x]$ ist.
Zeigen Sie, dass f in einem hinreichend großen Körper der Charakteristik p folgende Wurzeln hat

$$\frac{1}{2}(\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}).$$

Zeigen Sie, dass $f \in \mathbb{F}_p[x]$ für reduzibel ist für $p = 2, 3, 17$.

Aufgabe 1.4

Zeigen Sie, dass ein Körperautomorphismus den enhaltenen Primkörper punktweise fixiert.

Aufgabe 1.5

Sei F ein Teilkörper eines Körpers K und $f \in F[x]$ ein Polynom mit Koeffizienten im kleinen Körper F. Sei $\sigma : K \to K$ ein Automorphismus der F punktweise fixiert und $\alpha \in K$ eine Wurzel von f. Zeigen Sie, dass $\sigma(\alpha)$ eine Wurzel von f ist.

Aufgabe 1.6

Sei j ein Symbol welches die Relation $j^2 = -j - 1$ erfüllt und

$$\mathbb{F} = \{a + bj : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Definieren Sie eine Addition und Multiplikation auf $\mathbb{F}$ via

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1 j) + (a_2 + b_2 j) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)j \\ (a_1 + b_1 j)(a_2 + b_2 j) &= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)j + b_1 b_2 j^2.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}$ ein Körper ist und dass $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.