Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1
Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit der Basis $\{\alpha_i\beta_j\}$ im Beweis vom Satz vom Turm 2.13.

Aufgabe 2.2
Sei L/K eine algebraische Erweiterung und K/F eine algebraische Erweiterung. Zeigen Sie, dass L/F eine algebraische Erweiterung ist.

Aufgabe 2.3
Beschreiben Sie dass Kompositum von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ explizit als einfache Erweiterung. Sei L/K eine Körpererweiterung und $\alpha_1, \alpha_2 \in L$. Was ist das Kompositum $K(\alpha_1)K(\alpha_2)$?

Aufgabe 2.4
Bestimmen Sie den Erweiterungsgrad von $\mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{2}})$.

Aufgabe 2.5
Sei L/K eine Erweiterung vom Grad $n < \infty$. Zeigen Sie:

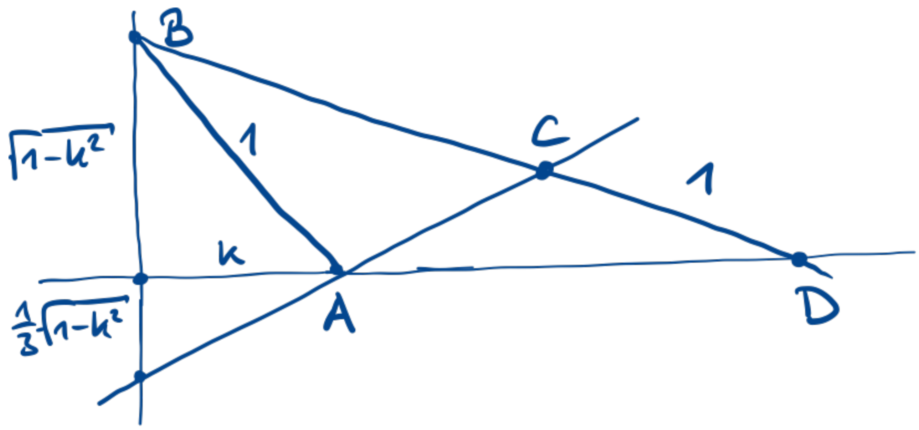
- Für jedes $\alpha \in L$ ist die (Links-) Multiplikation mit α ein Homomorphismus des K-Vektorraums L, d.h. linear.
- L ist isomorph zu einem Teilkörper des Rings $K^{n\times n}$ und damit enthält $K^{n\times n}$ bereits jeden Körper L vom Grad höchstens n.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 2.6

In dieser Aufgabe verwenden wir ein Lineal auf dem eine Länge 1 markiert ist und konstruieren mittels *Schiebung* die Längen $k^{1/3}$ und $k^{2/3}$ für positives reelles $0 < k \leq 1$.

- Sei $A = (k, 0)$ der Mittelpunkt eines Kreises mit Radius 1.
- Sei $B = (0, \sqrt{1-k^2})$ ein Schnittpunkt des Kreises mit der vertikalen Achse.
- Konstruiere (mittels 3-Teilung der Länge) den Punkt $(0, -\frac{1}{3}\sqrt{1-k^2})$.
- Konstruiere die Gerade durch diesen Punkt und A.
- *Schiebe* das Lineal so, dass es durch B geht und der Abstand der entstehenden Schnittpunkte, C mit der eben konstruieren Geraden und D mit der horizontalen Achse, den Abstand 1 hat.



Zeigen Sie, dass A und D den Abstand $2k^{1/3}$ sowie B und C den Abstand $2k^{2/3}$ haben. Tipp: Verschaffen Sie sich mit ähnlichen Dreiecken und dem Satz von Pythagoras genügend viele Gleichungen um die Koordinaten von C sowie die gesuchten Längen in Verbindung zu bringen.