Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1

1. Sei K ein Körper und σ ein Isomorphismus von $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mit $\sigma(\alpha_i) = \alpha_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und $\sigma(c) = c$ für alle $c \in K$. Zeigen Sie, dass $\sigma = \mathrm{id}$.
2. Sei L/K eine Körpererweiterung und $\sigma, \tau : K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to L$ zwei Homomorphismen, die K punktweise fixieren und mit $\sigma(\alpha_i) = \tau(\alpha_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $\sigma = \tau$.

Aufgabe 3.2

Sei G eine Gruppe der Ordnung n. Zeigen Sie, dass G genau dann zyklisch ist, wenn für jeden Teiler d von n höchstens eine Untergruppe der Ordnung d in G existiert.
Tipp: $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

Aufgabe 3.3

Finden Sie eine Galoiserweiterung deren Galoisgruppe abelsch aber nicht zyklisch ist.

Aufgabe 3.4

Bestimmen Sie die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers von $x^5 - 2$ über $\mathbb{Q}$ und bringen Sie ihre Untergruppen in Verbindung mit passenden Zwischenkörpern.

Aufgabe 3.5

Ist die Polynomgleichung $x^5 - 2 = 0$ durch Radikale auflösbar?

Aufgabe 3.6

Diskutieren Sie die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers von $x^8 - 2$ über $\mathbb{Q}$.