

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1

Zeigen Sie, dass ein Retrakt eines projektiven Objekts projektiv ist.

Aufgabe 6.2

Zeigen Sie, dass initiale und terminale Objekte bis auf Isomorphie eindeutig sind.

Aufgabe 6.3

Zeigen Sie, dass das Produkt $A \xleftarrow{p_1} A \times B \xrightarrow{p_2} B$ bis auf Isomorphie eindeutig ist. Sei Q ein Objekt welches zu $A \times B$ isomorph ist. Zeigen Sie, dass Q auch ein Produkt ist von A und B ist, d.h. dass ein Produktdiagramm für Q existiert welches die universelle Eigenschaft besitzt.

Aufgabe 6.4

Sei \mathcal{C} eine Kategorie mit endlichen Produkten und $f : A \rightarrow B$ ein beliebiger Pfeil in \mathcal{C} . Der *Graph* von f ist

$$\Gamma(f) = (1_A, f) : A \rightarrow A \times B.$$

Zeigen Sie, dass $\Gamma(f)$ mono ist.

Sei nun $\mathcal{C} = \mathbf{Sets}$. Betrachten Sie die Identität auf Objekten zusammen mit der Zuweisung $f \mapsto \Gamma(f)$. Zeigen Sie, dass dann $\Gamma : \mathbf{Sets} \rightarrow \mathbf{Rel}$ ein Funktor ist. Hierzu müssen Sie unter leichter Verdrehung der Tatsachen annehmen, dass $\Gamma(f)$ der Graph von f , also wirklich eine Relation ist.

Aufgabe 6.5

Sei P eine partiell geordnete Menge, aufgefasst als Kategorie. Interpretieren Sie Produkte in dieser Kategorie.