Übungsblatt 11

Wird in der Übung am Mittwoch, den 23.01.2019, besprochen.

Aufgabe 11.1
Man bestimme das kleinste n mit $4 \mid n$, so dass keine Hadamard-Matrix der Ordnung n existiert, die durch Kombination der Paley-Konstruktion mit dem Kronecker-Produkt erzeugt werden kann.

Aufgabe 11.2
Sei $\mathcal{D}$ ein $S_\lambda(t, k, v)$ mit Punktmenge $\mathcal{P}$ und Blockmenge $\mathcal{B}$ und I eine Teilmenge von $\mathcal{P}$ mit $|I| \leq t$. Die Inzidenzstruktur $\mathcal{D}_I$ mit Punktmenge $\mathcal{P}_I = \mathcal{P} \setminus I$ und Blockmenge $\mathcal{B}_I = \{B \setminus I : B \in \mathcal{B}, I \subseteq B\}$ wird *„derived" Design von $\mathcal{D}$ bezüglich I* genannt.
Man zeige, dass $\mathcal{D}_I$ tatsächlich ein $S_\lambda(t - i, k - i, v - i)$ ist.

Aufgabe 11.3
Sei $\mathcal{D}$ ein $S_\lambda(3, k, v)$ mit Punktmenge $\mathcal{P}$ und Blockmenge $\mathcal{B}$. Für einen beliebigen Punkt $p \in \mathcal{P}$ gelte, dass das „derived" Design $\mathcal{D}_p$ von $\mathcal{D}$ bezüglich p symmetrisch ist.

a) Man zeige, dass $\lambda(v - 2) = (k - 1)(k - 2)$.

b) Man zeige, dass je zwei Blöcke von $\mathcal{D}$ entweder disjunkt sind oder sich in genau $\lambda + 1$ Punkten schneiden.

c) Sei $B \in \mathcal{B}$. Man zeige, dass die Inzidenzstruktur $\mathcal{D}^B$ mit Punktmenge $\mathcal{P}^B = \mathcal{P} \setminus B$ und Blockmenge $\mathcal{B}^B = \{A \in \mathcal{B} : A \cap B = \emptyset\}$ ein $S_\mu(2, k, v - k)$ ist und bestimme μ.

d) Man wende die Fisher-Ungleichung auf das Design $\mathcal{D}^B$ an und folgere, dass entweder $v = 2k$ oder $k = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$ oder $k = 2(\lambda + 1)(\lambda + 2)$.

Aufgabe 11.4
Man zeige, dass kein symmetrisches $S_2(2, 8, 29)$ existiert.

Aufgabe 11.5
Wir betrachten eine Inzidenzstruktur deren Punkte die 1-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{F}_2^n$ und deren Blöcke die k-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{F}_2^n$ sind. Man zeige, dass λ_1 und λ_2 existieren, so dass je 3 Punkte entweder in genau λ_1 oder genau λ_2 Blöcken enthalten sind und bestimme λ_1 und λ_2 in Abhängigkeit von n und k. Zusätzlich bestimme man die Anzahl der dreielementigen Mengen von Punkten, die in genau λ_1 bzw. λ_2 Blöcken enthalten sind.