Übungsblatt 2

Dieses Blatt wird in der Übung am Mittwoch, den 24.10.2018, besprochen.

Aufgabe 2.1
Beweisen Sie:

a) $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n}$.

b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$, für $n \in \mathbb{N}$.

c) $\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k}^2 \right] = \binom{2n}{n}$, für $n \in \mathbb{Z}_+$.

d) $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$, für $n \geq 1$.

e) $\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$, für $n \geq 2$.

Aufgabe 2.2
Beweisen Sie:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2.3 (Satz von Lucas (1878))
Beweisen Sie: Seien p eine Primzahl, $n = \sum_{i=0}^{m} n_i p^i$ und $k = \sum_{i=0}^{m} k_i p^i$, wobei $0 \leq n_i, k_i < p$. Dann ist

$$\binom{n}{k} \equiv \prod_{i=0}^{m} \binom{n_i}{k_i} \pmod{p}.$$

Aufgabe 2.4
Beweisen Sie den *Multinomialsatz*:

$$(a_1 + \cdots + a_r)^n = \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_r \geq 0 \\ n_1 + \cdots + n_r = n}} \binom{n}{n_1, \ldots, n_r} a_1^{n_1} \ldots a_r^{n_r}.$$

Aufgabe 2.5
Seien $n \in \mathbb{N}$, $b_1, b_2, \ldots, b_r \in \mathbb{Z}_+$, $b_1 + 2b_2 + \cdots + rb_r = n$. Bestimmen Sie die Anzahl derjenigen Permutationen aus S_n, die genau b_1 Fixpunkte, genau b_2 Zweierzyklen, … und genau b_r r-Zyklen besitzen.