

Übungsblatt 3

Wird in der Übung am Mittwoch, den 07.11.2018, besprochen.

Aufgabe 3.1

Wieviele natürliche Zahlen $\leq 1\,000\,000$ sind weder von der Form x^2 , x^3 noch x^5 ?

Aufgabe 3.2

Wie viele Anordnungen der Buchstaben A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P gibt es, aus denen man durch Streichen von Buchstaben keines der Wörter BAD, DACH oder APO erhält? Wie sieht es aus, wenn wir auch MAHLEN verbieten?

Aufgabe 3.3

Die Eulersche φ -Funktion $\varphi(n)$ zählt die zu n teilerfremden Zahlen k , $1 \leq k \leq n$. Beweisen Sie mit Inklusion-Exklusion, dass

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_t}\right),$$

wobei p_i die verschiedenen Primteiler von n sind.

Aufgabe 3.4

Man verschärfe den Heiratssatz wie folgt:

Gilt für ein Befreundungssystem $F : D \rightarrow 2^H$ die zweite Bedingung des Heiratssatzes, also für alle $D_0 \subseteq D$, dass $|\bigcup_{d \in D_0} F(d)| \geq |D_0|$, sowie $|F(d)| \geq r > 0$ für alle $d \in D$, so gibt es

1. im Falle $r \leq |D|$ mindestens $r!$,
2. im Falle $r > |D|$ mindestens $\frac{r!}{(r-|D|)!}$

verschiedene mit F verträgliche Heiraten.

Aufgabe 3.5 (Miller [1910])

Zeigen Sie: Ist G eine endliche Gruppe und U eine Untergruppe von G , so besitzen die linken und rechten Nebenklassen von G nach U ein gemeinsames Repräsentantensystem.

Hinweis (Heiratssatz): Man interpretiere die linken Nebenklassen als „Damen“, die rechten als „Herren“ und spreche von Freundschaft, wenn Dame und Herr sich schneiden.