Übungsblatt 4

Wird in der Übung am Mittwoch, den 14.11.2018, besprochen.

Aufgabe 4.1
Sei $(D, \preceq)$ die Menge der Teiler von 60 versehen mit der Halbordnungsrelation der Teilbarkeit, also $a \preceq b \Leftrightarrow a|b$.

a) Man finde eine Antikette maximaler Mächtigkeit und eine Zerlegung von D in eine minimale Anzahl Ketten.

b) Man finde eine Kette maximaler Mächtigkeit und eine Zerlegung von D in eine minimale Anzahl Antiketten.

Aufgabe 4.2
Ein Matching M in einem Graphen $G = (V, E)$ heißt ein 1-*Faktor* von G, wenn jeder Punkt auf einer Kante in M liegt. Man zeige, dass jeder k-reguläre bipartite Graph einen 1-Faktor und daher mit Induktion auch eine 1-*Faktorisierung*, also eine Zerlegung von E in 1-Faktoren, besitzt. Man sagt auch, dass die bipartiten Graphen *faktorisierbar* sind.

Hinweis: In einem k-regulären Graph gehen von jeder Ecke genau k Kanten aus.

Aufgabe 4.3
Es seien r und s natürliche Zahlen. Dann enthält jede partiell geordnete Menge $(X, \preceq)$ mit Mächtigkeit $|X| \geq rs + 1$ eine Kette mit $r + 1$ Elementen oder eine Antikette mit $s + 1$ Elementen.

Aufgabe 4.4 (Ahrens und Szekeres [1935])
Es sei $(a_1, \ldots, a_n)$ eine Folge reeller Zahlen mit Länge $n \geq r^2 + 1$. Dann gibt es eine monotone Teilfolge der Länge $r + 1$.

Aufgabe 4.5
S und T seien zwei disjunkte Teilmengen der Punktemenge V eines Graphen $G = (V, E)$. Eine S und T trennende Punktemenge ist eine Menge $X \subseteq V$, für die jeder Weg von einem Punkt in S zu einem Punkt in T einen Punkt in X enthalten muss. Man zeige, dass die minimale Mächtigkeit einer derartigen Menge gleich der Maximalzahl von Wegen von S nach T ist, für die keine zwei dieser Wege einen Punkt gemeinsam haben (auch nicht einen der Endpunkte!).