

## Übungsblatt 5

Wird in der Übung am Mittwoch, den 21.11.2018, besprochen.

### Aufgabe 5.1

Sei  $f$  ein Fluss im Netzwerk  $N = (G, c, q, s)$ . Man beweise

$$\|f\| = \sum_{e^+=s} f(e) - \sum_{e^-=s} f(e).$$

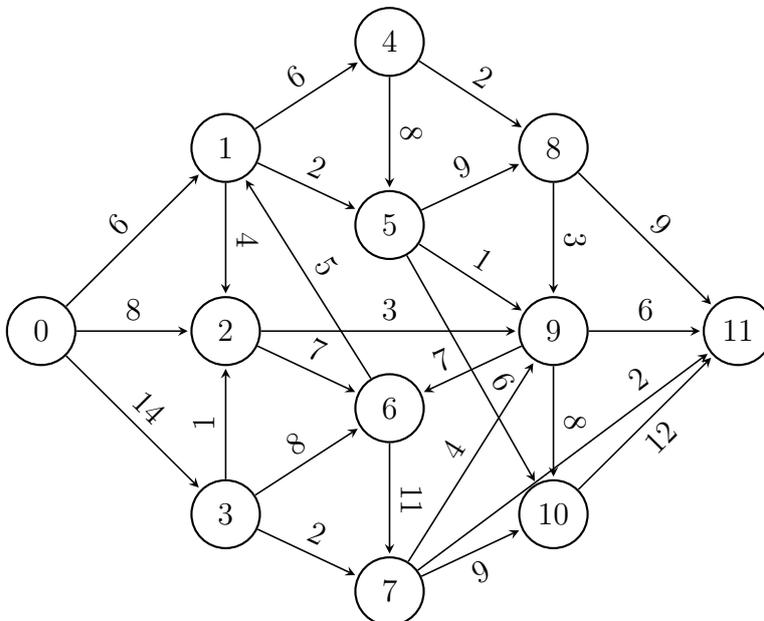
Hinweis: Man betrachte  $\sum_{p \in V} \sum_{e^-=p} f(e)$  und benütze die Flusserhaltungsbedingung für  $p \neq q, s$ .

### Aufgabe 5.2

$N = (G, c, q, s)$  sei ein Fluss-Netzwerk. Man zeige, dass es mindestens eine Kante  $e$  in  $G$  gibt, so dass  $G - e$  (d.h. aus  $G$  wird die Kante  $e$  entfernt) einen kleineren maximalen Wert eines Flusses besitzt als  $G$ , sofern dieser Wert  $\neq 0$  ist.

### Aufgabe 5.3

Man bestimme einen maximalen Fluss von 0 nach 11 in dem folgenden gerichteten Graphen, wobei die Zahlen die Kapazitäten sind.



(Bitte umblättern!)

**Definition 1.** Sei  $N = (G, c, q, s)$  ein Netzwerk und  $W$  ein Weg von  $q$  nach  $s$ . Dann ist für jede Zahl  $\delta \in \mathbb{R}_+$  durch

$$f_{\delta, W}(e) := \begin{cases} \delta & \text{falls } e \text{ eine Vorwärtskante in } W \text{ ist} \\ -\delta & \text{falls } e \text{ eine Rückwärtskante in } W \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Fluss  $f_{\delta, W}$  vom Wert  $\delta$  in  $N$  gegeben; ein derartiger Fluss heißt ein *elementarer* Fluss mit *Träger*  $W$ .

Dies ist eine Formalisierung der Augmentierung von Flüssen im folgenden Sinne: Sei  $f$  ein zulässiger Fluss in  $N$  und  $W$  ein zunehmender Weg von  $q$  nach  $s$ , dann existiert ein  $\delta \in \mathbb{R}_+$ , so dass  $f + f_{\delta, W}$  ein zulässiger Fluss auf  $N$  mit Wert  $\|f\| + \delta$  ist.

#### Aufgabe 5.4

Der Beweis des Ganzheitssatzes zeigt, dass es für Flussnetzwerke mit ganzzahligen Kapazitäten einen maximalen Fluss gibt, der die Summe elementarer Flüsse (auf zunehmenden Wegen) ist. Man zeige, dass im allgemeinen nicht jeder maximale Fluss so darstellbar ist.

#### Aufgabe 5.5

Man gebe eine Methode an, eine explizite Lösung für die Sylvestersche Vermutung im Fall  $k = 2$  zu konstruieren.

Hinweis: Das Beispiel aus der Vorlesung kann verallgemeinert werden.