Übungsblatt 8

Wird in der Übung am Mittwoch, den 19.12.2018, besprochen.

Aufgabe 8.1

Man finde alle monischen irreduziblen Polynome mit Grad ≤ 3 in $\mathbb{F}_3[x]$.

Aufgabe 8.2

Man zeige, dass die Polynome

a) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$,

b) $x^5 - x + 1$,

c) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$,

d) $x^7 + x^2 - 1$

in $\mathbb{F}_3[x]$ irreduzibel sind. Um sich Rechenarbeit zu sparen, kann man mit Hilfe von MAGMA leicht testen, ob ein Polynom ein anderes teilt.

Aufgabe 8.3

Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{C}$. Wir definieren $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$,

$$F(n) = \sum_{1 \leq k \leq n} f(k/n) \quad \text{und} \quad G(n) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \mathrm{ggT}(k,n)=1}} f(k/n).$$

a) Man zeige, dass

$$G(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) F(d)$$

b) Für $a \in \mathbb{Z}$ ist die *Ramanujan-Summe* $c_a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$,

$$c_a(n) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \mathrm{ggT}(k,n)=1}} e^{\frac{2\pi i k a}{n}}.$$

Man zeige, dass

$$c_a(n) = \sum_{d|\mathrm{ggT}(a,n)} \mu(n/d) d.$$

c) Man benutze b) um zu zeigen, dass $\varphi(n) = c_0(n)$ und $\mu(n) = c_1(n)$.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 8.4
Gegeben seien die Eckpunkte eines konvexes $2n$-Ecks. Man zeige, dass die Anzahl der Möglichkeiten Paare dieser Punkten so zu verbinden, dass sich keine der n Verbindungsstrecken schneiden, gleich der n-ten Catalanzahl ist.

Aufgabe 8.5
Man zeige, dass die Anzahl der Möglichkeiten, die Zahlen $1, \ldots, 2n$ in einer $2 \times n$ Matrix

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} x_{11} < x_{12} < \cdots < x_{1n} \\ x_{21} < x_{22} < \cdots < x_{2n} \end{aligned}$$

und

$$x_{11} < x_{21}, x_{12} < x_{22}, \ldots, x_{1n} < x_{2n}$$

anzuordnen, gleich der n-ten Catalanzahl ist.