

Übungsblatt H-1

Hausaufgabe

Abgabe bis 12. April 2019, 15 Uhr, im IAG-Briefkasten (G03-222)

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Seien $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ zwei Punkte in \mathbb{R}^2 . Untersuchen Sie, ob es sich bei den folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um Metriken handelt.

- a) $d_\infty(P_1, P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$
b) $d_{-\infty}(P_1, P_2) = \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $P \in (\mathbb{R}^2, d)$ und sei $M_1(P) := \{Q \in \mathbb{R}^2 : d(P, Q) = 1\}$ die Menge aller Punkte Q in (\mathbb{R}^2, d) , deren Abstand zu P genau 1 ist. Skizzieren Sie die folgenden Mengen.

- a) $M_1(P)$ in $(\mathbb{R}^2, d_2), (\mathbb{R}^2, d_1)$ und (\mathbb{R}^2, d_∞) für $P = (2, 2)$.
b) $M_1(P_i), i = 1, 2, 3$, für $P_1 = (1, 2), P_2 = (3, 0), P_3 = (-2, \frac{1}{4})$ in (\mathbb{R}^2, d_H) , wobei d_H die aus der Vorlesung bekannte Holzfällermetric bezeichne, die für $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ definiert ist als

$$d_H(P_1, P_2) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & \text{falls } x_1 = x_2, \\ |y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2| & \text{falls } x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

- c) $M_1(P_i), i = 1, 2, 3$, für $P_1 = (2, 2), P_2 = (0, 0), P_3 = (0, \frac{3}{4})$ in (\mathbb{R}^2, d_F) , wobei d_F die Französische Eisenbahnmetrik bezeichne, die für $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ definiert ist als

$$d_F(P_1, P_2) = \begin{cases} d_2(P_1, P_2) & \text{falls } P_2 \in (0P_1), \\ d_2(P_1, 0) + d_2(P_2, 0) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die beiden metrischen Räume (\mathbb{R}^2, d_1) und (\mathbb{R}^2, d_∞) isometrisch sind, indem Sie nachweisen, dass die Abbildung $f : (\mathbb{R}^2, d_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty), f(x, y) = (x + y, x - y)$ eine Isometrie ist.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $f : (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$ ein Automorphismus der reellen Geraden (\mathbb{R}, d) mit $d(x, y) = |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Beschreiben Sie zunächst verbal, um was für Abbildungen es sich bei f handeln kann. Zeigen Sie, dann formal, dass entweder

$$(1) f(x) = f(0) + x \quad \text{oder} \quad (2) f(x) = f(0) - x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Hinweis: Setzen Sie zum Beweisen $f(0) = a$ und $f(1) = b$. Welchen Abstand haben dann a und b und welchen Abstand hat $f(x)$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$ zu a bzw. b ?

Aufgabe 5 (keine Abgabe)

Untersuchen Sie, in welchem der folgenden metrischen Räume der Graph $y = |x|$ eine Gerade ist.

$$(1) (\mathbb{R}^2, d_2) \quad (2) (\mathbb{R}^2, d_1) \quad (3) (\mathbb{R}^2, d_\infty)$$

Hinweis: Wählen Sie zunächst drei Punkte des Graphen (bspw. $(-1, 1)$, $(0, 0)$ und $(1, 1)$) und überprüfen Sie in jedem Raum die Dreiecksungleichung (vgl. Skript, Lemma 1.6). Geben Sie ggf. die Isometrie von dem Graphen auf die reelle Gerade an.