Übungsblatt H–5

Hausaufgabe
Abgabe bis 7. Juni 2019, **14 Uhr**, im IAG-Briefkasten (G03-222)

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Es sei X ein Punkt im ersten Oktanten des $\mathbb{R}^3$. Zu X können kartesische Koordinaten (x_1, x_2, x_3) sowie Kugelkoordinaten (r, λ, ϕ) angegeben werden (vgl. Skript: Def. 5.2).

a) Ermitteln Sie Umrechnungsformeln von den Kugel- in die kartesischen Koordinaten.

b) Ermitteln Sie Umrechnungsformeln von den kartesischen in die Kugelkoordinaten.

Hinweis: Nutzen Sie Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck.

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Betrachten Sie die Sphäre $S_{r,O}$ mit dem sphärischen Abstand d_s.

a) Zeigen Sie, dass alle Großkreise auf $S_{r,O}$ den Radius r haben.

b) Zeigen Sie, dass für zwei Punkte X, Y auf $S_{r,O}$ gilt: $d_s(X, Y) = r \cdot |\measuredangle XOY|$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass $(S_{r,O}, d_s)$ ein metrischer Raum ist.
Hinweis: Verwenden Sie für den Nachweis der Dreiecksungleichung Satz 5.7 (Skript).

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Gegeben sei ein Großkreis k der Sphäre $S_{r,O}$.

a) Zeigen Sie: Es gibt drei Punkte X, Y, Z auf k, sodass keine der folgenden Gleichungen gilt:

$$\begin{aligned} d_s(X, Y) + d_s(Y, Z) &= d_s(X, Z), \\ d_s(X, Z) + d_s(Z, Y) &= d_s(X, Y), \\ d_s(Y, X) + d_s(X, Z) &= d_s(Y, Z). \end{aligned}$$

b) Seien X, Y, Z paarweise nicht-diametrale Punkte auf k. Zeigen Sie, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind, indem Sie (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) nachweisen.

(1) $d_s(X, Y) + d_s(Y, Z) = d_s(X, Z)$,

(2) $d_s(X, Z) \geq d_s(X, Y)$ und $d_s(X, Z) \geq d_s(Y, Z)$ und $d_s(X, Y) + d_s(Y, Z) < r\pi$,

(3) Y liegt auf dem kürzeren Kreisbogen zwischen X und Z.