Übungsblatt H–6

Hausaufgabe
Abgabe bis 28. Juni 2019, **14 Uhr**, im IAG-Briefkasten (G03-222)

Auf Blatt H–6 sind 16 Punkte (davon 4 Bonuspunkte) zu erwerben. Die Gesamtpunktzahl bleibt bei 72 Punkten, folglich werden 36 Punkte zum Scheinerwerb benötigt.

In den Aufgaben 1–3 betrachten wir das Poincaré-Halbebenenmodell der hyperbolischen Geometrie mit den aus der Vorlesung üblichen Bezeichnungen.

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Gegeben seien Punkte $A, B, C, D \in \mathbb{H}^2$ mit $A = -3 + 4i,\ B = 5i,\ C = 6 + i$ und $D = i$.

a) Bestimmen Sie den Abstand $d(A, B)$.

b) Skizzieren Sie die Gerade (AB) sowie die Dreiecke ΔABC und ΔABD.

c) Skizzieren Sie je eine Parallele zu (AB) durch C und durch D.
Zur Erinnerung: Zwei Geraden ℓ_1, ℓ_2 sind parallel, wenn sie keine gemeinsamen Punkte haben oder $\ell_1 = \ell_2$.

d) Weisen Sie nach, dass „$\|$“ in der hyperbolischen Geometrie nicht transitiv ist.

Hinweis: Wir empfehlen für die Zeichnung GeoGebra zu verwenden, idealerweise das unter `https://www.geogebra.org/classic/DBXvbruR` *realisierte Halbebenenmodell.*

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Betrachten Sie das Dreieck ΔABD aus Aufgabe 1 sowie einen durch eine Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ mit } \det(M) = 1$$

beschriebenen Automorphismus $f_M : \hat{\mathbb{H}}^2 \to \hat{\mathbb{H}}^2$ mit

$$f_M(Z) = \frac{aZ + b}{cZ + d}.$$

Skizzieren Sie die Gerade (AB) sowie das Dreieck ΔABD in der Poincaré-Halbebene und berechnen und skizzieren Sie die Bilder $f(\Delta ABD)$ von ΔABD für

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, **b)** $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, **c)** $M = \begin{pmatrix} 2 & 5\sqrt{3} \\ \frac{1}{5}\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Verwenden Sie weiterhin GeoGebra. Sie dürfen in den Aufgabenteilen **b)** *und* **c)** *die entsprechenden Funktionswerte per Computer berechnen (bspw. mithilfe von* `https://www.wolframalpha.com/`*). Runden Sie geeignet.*

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es bezeichne f_M dieselbe Abbildung wie in Aufgabe 2. Ein Punkt $Z \in \hat{\mathbb{H}}^2$ heißt Fixpunkt von f_M, wenn $f_M(Z) = Z$.

a) Zeigen Sie, dass sich für $c \neq 0$ die Fixpunkte von f_M mit der Formel

$$Z = \frac{a-d}{2c} \pm \frac{\sqrt{\mathrm{Spur}(M)^2 - 4}}{2c}$$

berechnen lassen. Dabei sei die Spur einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ definiert als $\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
Hinweis: Beachten Sie $\det(M) = 1$.

b) Charakterisieren Sie für $c \neq 0$ Anzahl und Lage der Fixpunkte von f_M in $\hat{\mathbb{H}}^2$ in Abhängigkeit von $\mathrm{Spur}(M)$. Geben Sie die Fixpunkte für den Fall $c = 0$ an.

c) Bestimmen Sie die Fixpunkte der in Aufgabe 2 betrachteten Abbildungen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Im Folgenden bezeichne (P, G, I) eine Inzidenzstruktur mit Punktmenge P, Geradenmenge G und der angegebenen Inzidenzrelation $I \subset P \times G$.

a) Sei $P = \{0, \dots, 7\}, G = \{\{0,1,2,3\}, \{4,5,6,7\}, \{0,2,4,6\}, \{1,3,5,7\}, \{1,6\}, \{2,5\}\}$ und $I = \{(p,g) \in P \times G : p \in g\}$.

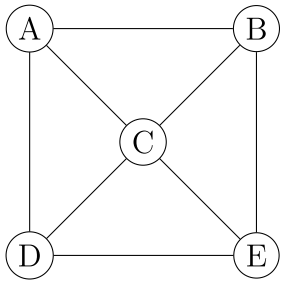
(1) Stellen Sie (P, G, I) als Graph dar.

(2) Betrachten Sie P und G als geordnete Mengen in der oben angegeben Reihenfolge. Geben Sie die Inzidenzmatrix $M = (m_{ij})$ von (P, G, I) an, wobei

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } p_i \in g_j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(3) Entscheiden Sie, ob (P, G, I) eine Inzidenzgeometrie ist.

b) Gegeben sei folgende als Graph kodierte Inzidenzstruktur (P, G, I), wobei jede längstmögliche gerade Strecke eine Gerade darstelle:



(1) Geben Sie P und G an, wobei $p \in P$ mit $g \in G$ inzidiere, wenn $p \in g$.

(2) Entscheiden Sie, ob (P, G, I) eine Inzidenzgeometrie ist.

c) Sei $\mathbb{F}_2^4$ der vierdimensionale Vektorraum über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen, und sei U ein dreidimensionaler Unterraum des $\mathbb{F}_2^4$ mit

$$U = \operatorname{span}\{(1,0,1,0), (0,1,0,1), (0,1,1,0)\}.$$

Ferner seien P die Menge aller ein- und G die Menge aller zweidimensionalen Untervektorräume von U. Für $p \in P$ und $g \in G$ gelte pIg, wenn $p \subseteq g$.

(1) Geben Sie die Mengen P und G explizit an, indem Sie für jeden enthaltenen Untervektorraum eine Basis angeben.

(2) Stellen Sie die Inzidenzstruktur (P, G, I) als Graph dar.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Sei $1 \le k \le \ell \le n$ und sei X eine Menge mit n Elementen. Ferner seien P die Menge aller k-elementigen und G die Menge aller ℓ-elementigen Teilmengen von X. Für $p \in P$ und $g \in G$ gelte pIg, wenn $p \subseteq g$.

a) Zeigen Sie $(p) = \binom{n-k}{\ell-k}$ für alle $p \in P$, d. h., jeder Punkt liegt auf $\binom{n-k}{\ell-k}$ Geraden.

b) Zeigen Sie

$$\binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell-k},$$

ohne die Binomialkoeffizienten (wie in Bsp. 8.4) auszurechnen.