

## Übungsblatt P-1

Präsenzübungen im Zeitraum 8.–12. April 2019

### Aufgabe 1

Seien  $A$  und  $B$  Aussagen. Zeigen Sie:  $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$ .

### Aufgabe 2

Sei  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ . Seien  $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$  zwei Punkte in  $\mathbb{R}^2$ . Weisen Sie nach, dass es sich bei der Abbildung  $d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $d_1(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$  um eine Metrik handelt.

### Aufgabe 3

Sei  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$  und seien die Metriken  $d_2, d_1, d_\infty$  und die Holzfällermetrik  $d_H$  wie in der Vorlesung (Beispiel 1.3 (3)).

- Seien  $P_1 = (4, 3)$  und  $P_2 = (1, 2)$  zwei Punkte in  $\mathbb{R}^2$ . Bestimmen Sie bezüglich der genannten Metriken den Abstand von  $P_1$  und  $P_2$ . Fertigen Sie eine Skizze an.
- Geben Sie alle Paare von Punkten in  $\mathbb{R}^2$  an, deren Abstand bezüglich  $d_2, d_1$  und  $d_\infty$  gleich ist.

### Aufgabe 4

Finden Sie weitere Beispiele für metrische Räume (Graphen, Bäume, Codes, ...).

### Aufgabe 5

Seien  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  zwei metrische Räumen. Zeigen Sie, dass jede abstandserhaltende Abbildung  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  injektiv ist.

### Aufgabe 6

Gegeben seien die drei Punkte  $P_1 = (1, 1), P_2 = (2, 2), P_3 = (2, 4)$  in  $\mathbb{R}^2$ .

- Überprüfen Sie, bezüglich welcher der Metriken  $d_2, d_1$  und  $d_\infty$  die drei Punkte  $P_1, P_2, P_3$  kollinear sind.
- Seien  $P_1$  und  $P_2$  wie oben. Geben Sie  $P'_3$  derart an, dass  $P_1, P_2, P'_3$  nur bezüglich  $d_\infty$  kollinear sind.

### Aufgabe 7

Beschreiben Sie alle Automorphismen von  $(\mathbb{R}^2, d_1)$ .

*Hinweis: Überlegen Sie zunächst, wann zwei Punkte  $P_1, P_2 \in (\mathbb{R}^2, d_1)$  einen eindeutigen Mittelpunkt haben.*