Übungsblatt P–6

Präsenzübungen im Zeitraum 24.–28. Juni 2019

Aufgabe 1

Neben dem Poincaré-Halbebenenmodell ist das Poincaré-Kreisscheibenmodell ein weiteres Modell der hyperbolischen Geometrie. Die Punktmenge sei in diesem Modell gegeben als

$$\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

Geraden sind Kreisbögen mit Mittelpunkt auf $k = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ sowie Mengen der Form $\{tz + (1-t)(-z) : t \in (0,1), z \in k\}$.

a) Skizzieren Sie einige Geraden in $\mathbb{D}^2$.

Zur Umrechnung aus dem Kreisscheibenmodell in das Halbebenenmodell dient die Funktion

$$C : \hat{\mathbb{D}}^2 \to \hat{\mathbb{H}}^2, \quad C(z) = \frac{-iz+1}{z-i}.$$

b) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion $C^{-1} : \hat{\mathbb{H}}^2 \to \hat{\mathbb{D}}^2$.

c) Bestimmen Sie die Bilder der Punkte $X = 2+3i,\ Y = -2+2i,\ Z = 2+i \in \hat{\mathbb{H}}^2$ in $\hat{\mathbb{D}}^2$ und konstruieren Sie alle Geraden durch die Bilder der Punkte.

d) Zeigen Sie, dass C^{-1} den Rand von $\hat{\mathbb{H}}^2$ auf den Rand von $\hat{\mathbb{D}}^2$ abbildet.

Nutzen Sie für Ihre Zeichnungen das unter `https://www.geogebra.org/classic/R5e9AggU` *realisierte Kreisscheibenmodell.*

Aufgabe 2

Entscheiden Sie, ob die Behauptung aus Bsp. 8.5 im Skript, dass in einem endlichen Graphen die Anzahl der Ecken mit ungerader Ordnung immer gerade ist, auch für unendliche Graphen gilt.

Aufgabe 3

Im Folgenden bezeichne (P, G, I) eine Inzidenzstruktur mit Punktmenge P, Geradenmenge G und der angegebenen Inzidenzrelation $I \subset P \times G$.

a) Sei $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, \ldots, 5\}$ und seien

$$P = \{\{x, y\} \subseteq Z_6 : y \equiv 2x \pmod 6\}$$

sowie

$$G = \{\{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 4\}, \{0, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}\}.$$

Für $p \in P$ und $g \in G$ gelte pIg, falls $p \subseteq g$.

(1) Stellen Sie (P, G, I) als Graph dar.

(2) Entscheiden Sie, ob es sich bei (P, G, I) um eine Inzidenzgeometrie handelt.

b) Sei $\mathbb{F}_2^3$ der dreidimensionale Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen und seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^3.$$

(1) Zeigen Sie, dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{F}_2^3$ ist.

Sei nun P die Menge aller eindimensionellen Untervektorräume von $\mathbb{F}_2^3$ und sei

$$G = \{\operatorname{span}\{v_1, v_2\}, \operatorname{span}\{v_1, v_3\}, \operatorname{span}\{v_2, v_3\}, \operatorname{span}\{v_1, v_2 + v_3\}\}.$$

Sei I definiert über „$\subseteq$“.

(2) Geben Sie G explizit an.

(3) Stellen Sie (P, G, I) als Graph dar.

(4) Entscheiden Sie, ob es sich bei (P, G, I) um eine Inzidenzgeometrie handelt.