

Didaktik der Geometrie (4)

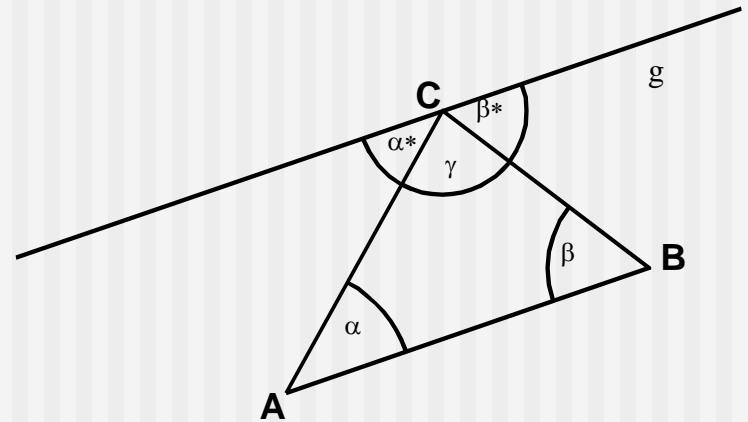
Vorlesung im
Sommersemester 2004

Prof. Dr. Kristina Reiss
Lehrstuhl für Didaktik der
Mathematik
Universität Augsburg

Antonia (Klasse 8)

„Mmh ... ich erinnere mich gerade irgendwie ... wie unser Lehrer uns das erzählt hat.“

Aber der hat auch nur gesagt, dass die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° beträgt ... der hat das auch nicht irgendwie begründet oder so ...“



NCTM Standards 2000

Logisches Argumentieren und Beweisen soll Inhalt des Mathematikunterrichts sein, damit Schüler

- diese Aspekte als wesentlich und nützlich für die Mathematik begreifen können;
- lernen, mathematische Behauptungen aufzustellen und zu untersuchen;
- mathematische Argumentationen und Beweise entwickeln und bewerten können;
- situationsangemessen verschiedene Argumentationen und Beweismethoden auswählen, anwenden und beurteilen können.

PISA

Mathematical Literacy

bezeichnet die Fähigkeit, „die Rolle, die Mathematik in der Welt spielt, zu erkennen und zu verstehen, **begründete mathematische Urteile abzugeben** und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und zukünftigen Lebens einer Person als eines konstruktiven, engagierten und reflektierenden Bürger entspricht.“

Deutsches PISA-Konsortium, 2001, S. 141

Beweisen im Geometrieunterricht

Was ist ein Beweis?

Durch einen Beweis wird eine Aussage auf andere Aussagen zurückgeführt, die entweder Axiome oder bereits bewiesene Sätze sind.

*Der Beweis eines Theorems ist ein Pfad, der von allgemein geteilten Aussagen startet und durch eine Reihe von Schritten einen psychologischen Zustand hervorruft, in dem das Theorem **offenkundig** erscheint.*

(Thom, 1973)

Beispiel

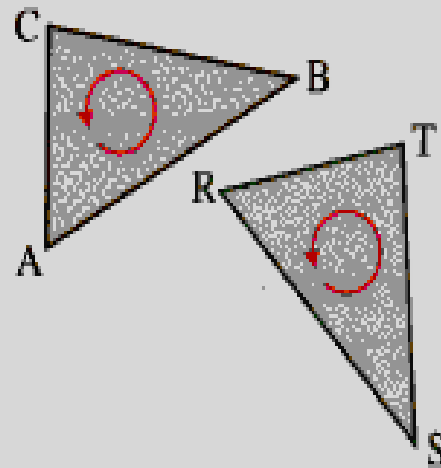
Griesel, H. & Postel, H. (1999). Elemente der Mathematik 8. Niedersachsen (S. 103). Hannover: Schroedel.

(2) Beweis des Kongruenzsatzes SSS

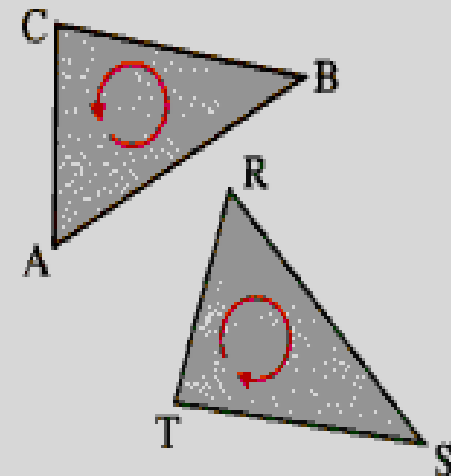
Gegeben sind zwei beliebige Dreiecke ABC und RST mit $|AB| = |RS|$, $|BC| = |ST|$ und $|AC| = |RT|$.

Gesucht ist nun eine Kongruenzabbildung, die das Dreieck ABC auf das Dreieck RST abbildet.

Fall (a): ABC und RST haben denselben Umlaufsinn.



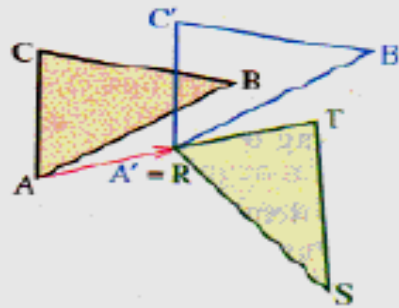
Fall (b): ABC und RST haben verschiedenen Umlaufsinn.



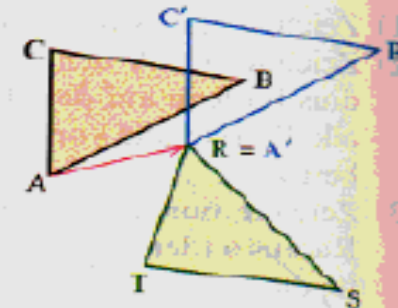
Wir gehen in folgenden Schritten vor:

1. Schritt: Durch die Verschiebung V_{AR} wird der Eckpunkt A des Dreiecks ABC auf den Punkt R abgebildet. Durch die Verschiebung erhalten wir ein Dreieck $A'B'C'$ mit $|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$ und $|AC| = |A'C'|$. Dabei ist $A' = R$.

1. Fall, 1. Schritt

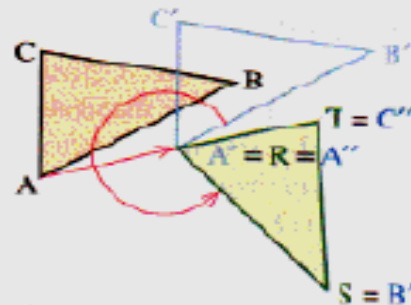


2. Fall, 1. Schritt

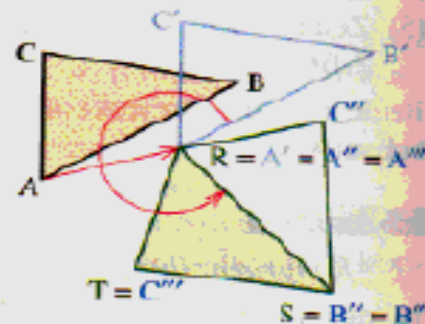


2. Schritt: Durch die Drehung $D_{R\varphi}$ mit $\varphi = \sphericalangle BRS$ wird die Seite $A'B'$ auf die dazu gleich lange Seite RS abgebildet.

1. Fall, 2. Schritt



1. Fall, 2. Schritt



Für den Bildpunkt C'' von C' gibt es dann zwei Möglichkeiten:

Fall (1): C'' fällt mit T zusammen (linkes Bild).

Dann wird $A'B'C'$ auf RST abgebildet.

Fall (2): C'' fällt nicht mit T zusammen (rechtes Bild).

Da bei einer Drehung die Länge einer Strecke erhalten bleibt, gilt:

(1) $|RC''| = |A'C'|$ und $|A'C'| = |AC| = |RT|$ und somit $|RC''| = |RT|$.

Also liegt C'' auf dem Kreis um R mit dem Radius $|RT|$.

(2) $|SC''| = |B'C'|$ und $|B'C'| = |BC| = |ST|$ und somit $|SC''| = |ST|$.

Also liegt C'' auf dem Kreis um S mit dem Radius $|ST|$.

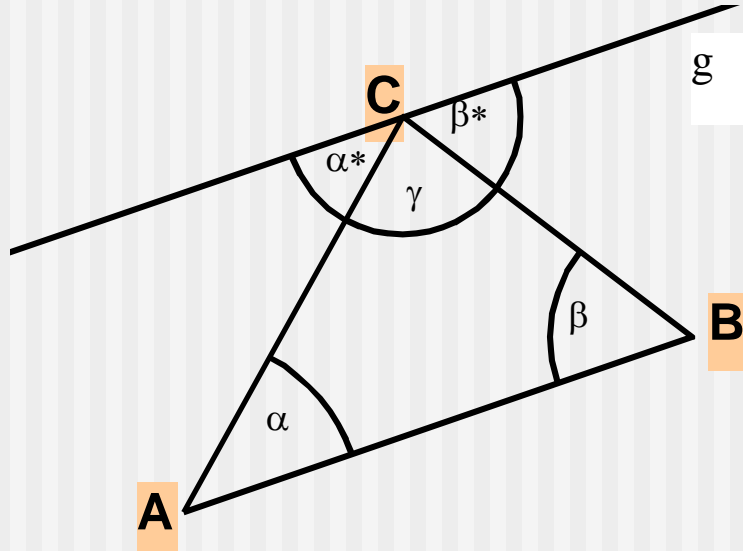
Wegen $C'' \neq T$ liegen C' und T symmetrisch zu der Geraden RS . Durch eine Achsenspiegelung an RS wird das Dreieck $A''B''C''$ auf das Dreieck RST abgebildet.

Durch die Verkettung $V_{AR} \circ D_{R\varphi}$ bzw. $V_{AR} \circ D_{R\varphi} \circ S_{RS}$ wird insgesamt das Dreieck ABC auf das Dreieck RST abgebildet. Die beiden Dreiecke sind somit kongruent zueinander.

Im Beispiel benötigen wir eine Verschiebung, eine Drehung und ggf. eine Achsenspiegelung. In Abschnitt 3.6 (Seite 136) wird die Frage behandelt, wie viele Kongruenzabbildungen man bei einem solchen Beweis überhaupt braucht.

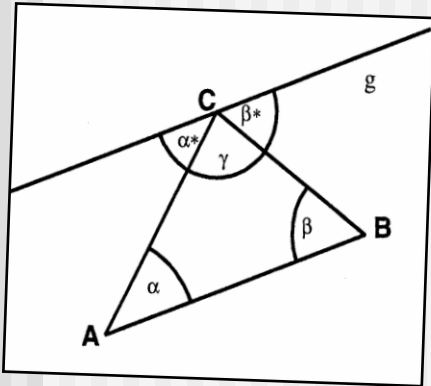
Griesel, H. & Postel, H. (1999). Elemente der Mathematik 8. Niedersachsen (S. 104). Hannover: Schroedel.

Beispiel



**Man zeige, dass die
Winkelsumme im
Dreieck 180° beträgt.**

In jedem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel 180° .



Warum gilt $\alpha = \alpha^*$ und $\beta = \beta^*$, wenn g parallel zu \overline{AB} ist?

Das gilt weil α^* zu α ein Wechselwinkel ist und das geht nur wenn die zwei Geraden (hier g und c) aufeinander parallel sind.

Begründe, dass die Winkelsumme der Innenwinkel im Dreieck 180° beträgt!

α^* ist der Wechselwinkel zu α , also ist er genauso groß. β^* ist Wechselwinkel zu β , also genauso groß. Dann zählt man α^* mit β^* und γ zusammen. $\alpha^* + \beta^* + \gamma = 180^\circ$

Aspekte mathematischen Beweisens

- Exploration der Problemstellung; Entwicklung einer Hypothese, Identifikation möglicher Argumente;
- Formulierung dieser Hypothese gemäß den Konventionen;
- Exploration der Hypothese und möglicher Argumentverknüpfungen;
- Auswahl von Argumenten und Verknüpfung in einer Kette von Deduktionsschlüssen;
- Organisation der Argumente in einen Beweis, der den mathematischen (Publikations-)Standards entspricht;
- Annäherung an einen formalen Beweis;
- Kontrolle durch die „mathematische Community“.

Basis: Phasenmodell des Beweisens von Boero (1999)

Aspekte mathematischen Beweisens am Beispiel des Satzes von der Winkelsumme im Dreieck

- Exploration der Problemstellung
- Entwicklung einer Hypothese
- Identifikation möglicher Argumente

Zeichne ein Dreieck ABC und markiere die Winkel α , β und γ .
Miss α , β und γ und bestimme ihre Summe. Wiederhole das Experiment mehrmals. Was stellst du fest?

Zeichne ein Dreieck ABC und markiere die Winkel α , β und γ .
Schneide das Dreieck aus, rei die Ecken ab und lege sie zu einem einzigen Winkel zusammen. Wie groß ist er?

Zeichne mehrere gleiche Dreiecke ABC mit den Winkeln α , β und γ und schneide sie aus. Lege sie so nebeneinander, dass oben eine gerade Linie entsteht. Dann müsste auch unten eine gerade Linie entstehen. Was heißt das für α , β und γ ?

Aspekte mathematischen Beweisens am Beispiel des Satzes von der Winkelsumme im Dreieck

- Formulierung der Hypothese gemäß den Konventionen

Satz:

In einem beliebigen Dreieck ABC mit den Winkeln α , β und γ gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Aspekte mathematischen Beweisens am Beispiel des Satzes von der Winkelsumme im Dreieck

- Exploration der Hypothese und möglicher Argumentverknüpfungen

Was weißt du über Dreiecke?

Ein gerade Linie entspricht einem gestreckten Winkel von 180° .

Scheitelwinkel sind kongruent.

Stufenwinkel an Parallelen sind kongruent.

Wechselwinkel an Parallelen sind kongruent.

Aspekte mathematischen Beweisens am Beispiel des Satzes von der Winkelsumme im Dreieck

- Auswahl von Argumenten und Verknüpfung in einer Kette von Deduktionsschlüssen

Die Beweisidee:

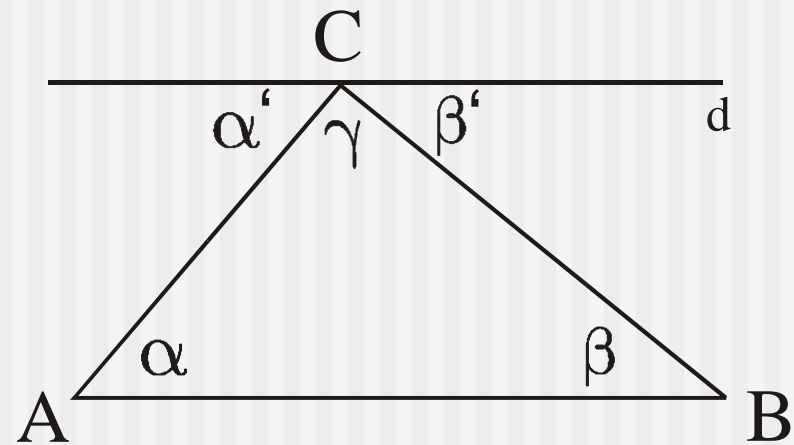
Ein gerade Linie entspricht einem gestreckten Winkel von 180° . Man könnte also zeigen, dass die Winkel eines Dreiecks kongruent zu Winkeln sind, die eine Gerade bilden.

Aspekte mathematischen Beweisens am Beispiel des Satzes von der Winkelsumme im Dreieck

- Anordnung der Argumente in einem (den Standards entsprechenden) Beweis

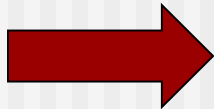
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Winkeln α , β und γ . Sei d die Parallele zu AB durch C . Seien α' und β' wie in der Zeichnung gegeben.

Dann sind α und α' genauso wie β und β' Wechselwinkel an parallelen Geraden. Es folgt $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ und mit $\alpha' + \beta' + \gamma = 180^\circ$ auch $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma = 180^\circ$.



Aspekte mathematischen Beweisens am Beispiel des Satzes von der Winkelsumme im Dreieck

- Annäherung an einen formalen Beweis
- Kontrolle durch die „mathematische Community“



Rückblick und Selbstkontrolle
Diskussion der Argumente

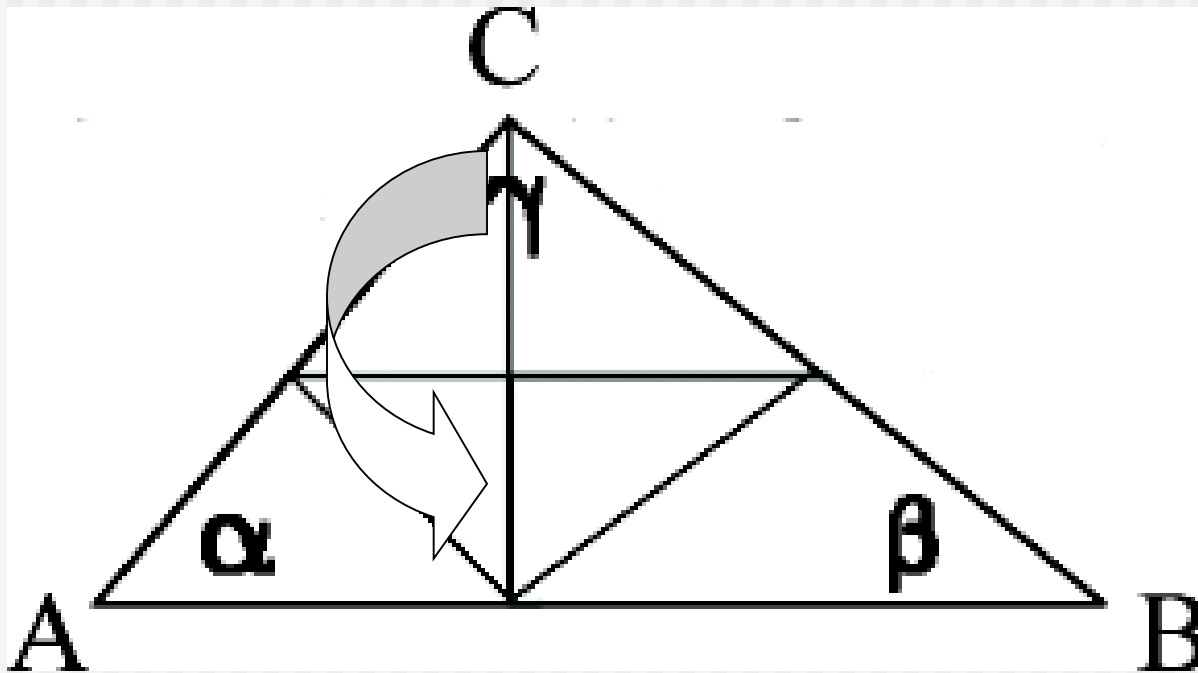
(1) Begründen durch Handeln

Stufe des anschauungsgebundenen Arbeitens (“enaktive Ebene”)

- Ecken eines Dreiecks abreißen und nebeneinander legen
- Achsensymmetrie mit dem (Mira-)Spiegel prüfen
- Falten (“Binomische Formeln”)

Noch einmal:
Der Satz von der Winkelsumme im Dreieck

“Beweis durch Falten”



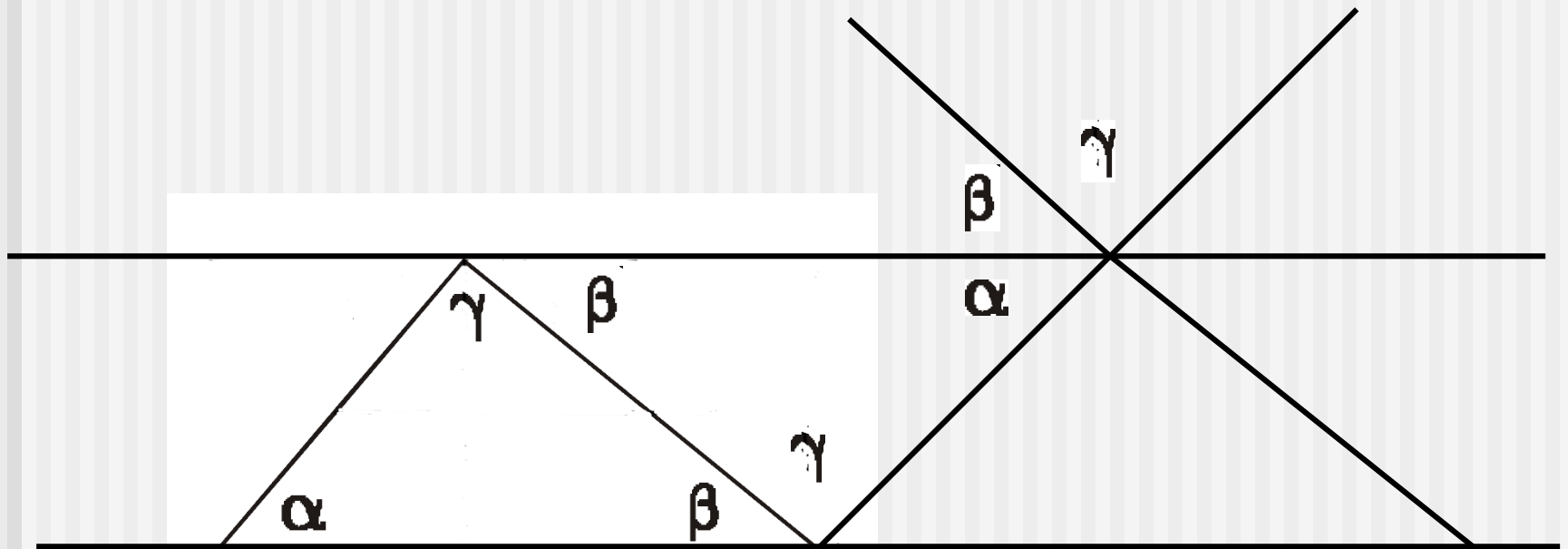
(2) Verbales Argumentieren

- Kein schriftlicher Beweis, sondern lediglich eine mündliche Argumentation,
- uneingeschränkte Bezugnahme auf die Beweisfigur,
- die Argumentationskette ist so kurz wie möglich, aber so ausführlich wie nötig,
- alle veranschaulichenden Hilfsmittel sind zugelassen (Folien, Transparentpapier, Modelle),
- „Tieferbohren“ bei einzelnen Beweisschritten nur dann, wenn dieses zur Einsichtgewinnung notwendig erscheint und die Schüler dazu motivierbar sind.

Holland, G. (1988). Geometrie in der Sekundarstufe. BI: Mannheim.

Noch einmal:
Der Satz von der Winkelsumme im Dreieck

“Beweis durch Parkettierungen”



(3) Inhaltliches Schließen

- Die zum Beweis benutzten Sätze angeben,
- einen Beweis schriftlich reproduzieren,
- Fallunterscheidung durchführen,
- einfache Beweise selber finden.

Holland, G. (1988). Geometrie in der Sekundarstufe. BI: Mannheim.

Noch einmal:

Der Satz von der Winkelsumme im Dreieck

Beweis mithilfe von Eigenschaften der Punktspiegelung

Sei ABC ein Dreieck mit den Seiten a, b und c . Sei M_a die Seitenmitte der Seite a und M_b die Seitenmitte von b . Eine Punktspiegelung an M_a bildet B auf C und β auf einen gleichgroßen Winkel β' mit Scheitel C ab. Eine Punktspiegelung an M_b bildet A auf C und α auf einen gleichgroßen Winkel α' mit Scheitel C ab. Da außerdem AB durch die Punktspiegelungen auf eine Parallele zu AB durch C abgebildet wird, folgt die Behauptung.

Rolle des Beweisen im Geometrieunterricht

Beweisen ist prototypisch für mathematisches Arbeiten.

Unterrichtsziele sind insbesondere:

- Förderung des kritischen Denkens
- Förderung von mathematischem Verständnis
- Förderung axiomatischen Arbeitens
- Förderung eines wissenschaftstheoretischen Verständnis

Probleme beim Beweisen (nicht nur) im Geometrieunterricht

Beweisen ist prototypisch für mathematisches Arbeiten.

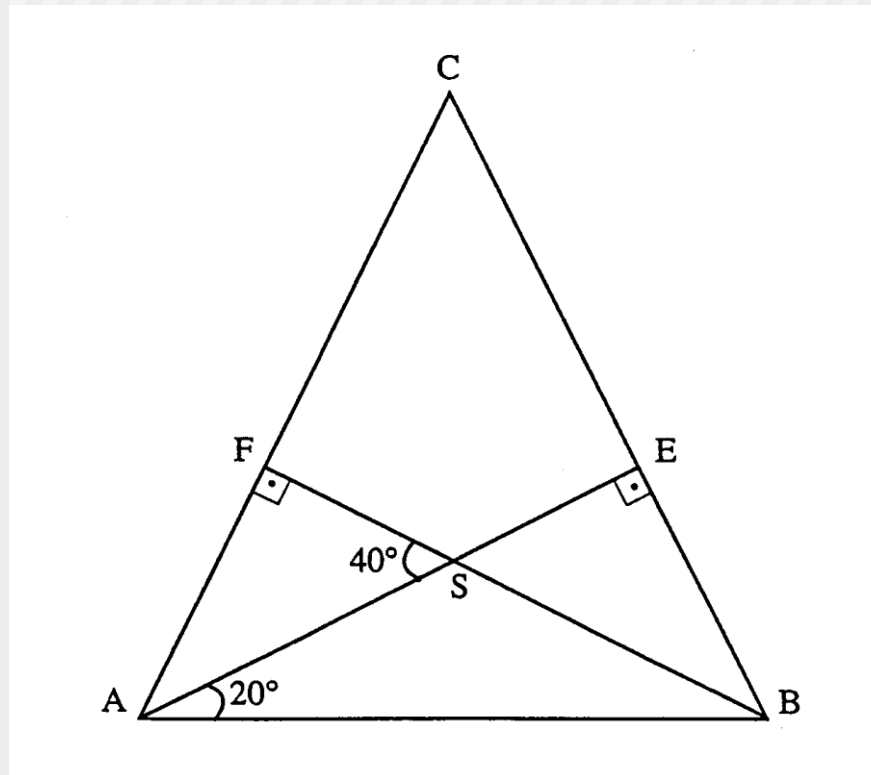
Unterrichtsziele sind insbesondere:

- Förderung des kritischen Denkens
- Förderung von mathematischem Verständnis
- Förderung axiomatischen Arbeitens
- Förderung eines wissenschaftstheoretischen Verständnis

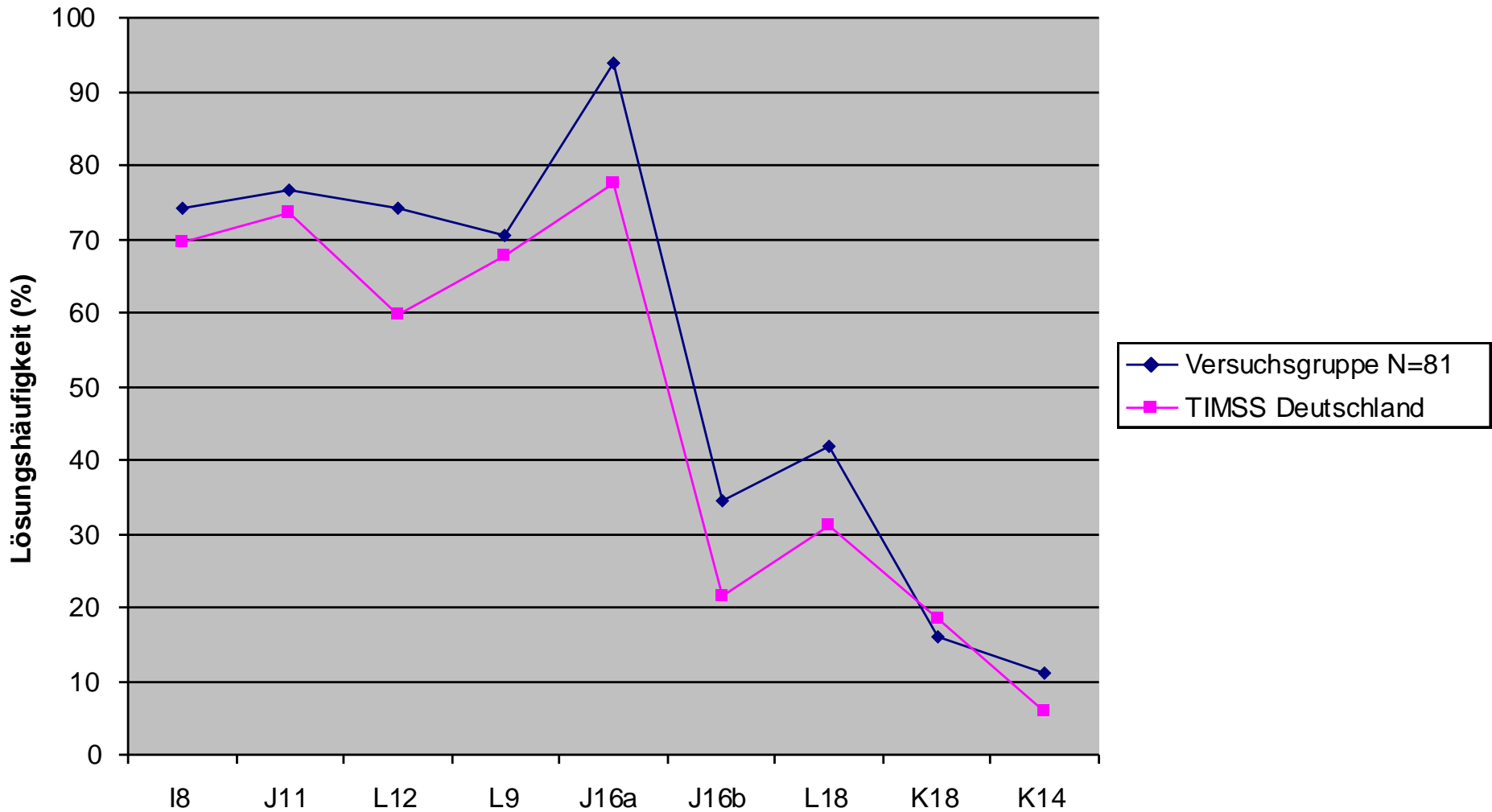
K 18 Im Dreieck ABC schneiden sich die Höhen AE und BF im Punkt S. $\angle FSA$ mißt 40° und $\angle SAB$ mißt 20° . Schreiben Sie einen Beweis für die folgende Behauptung:

" $\triangle ABC$ ist gleichschenkelig".

Geben Sie geometrische Begründungen für die einzelnen Schritte Ihres Beweises an.



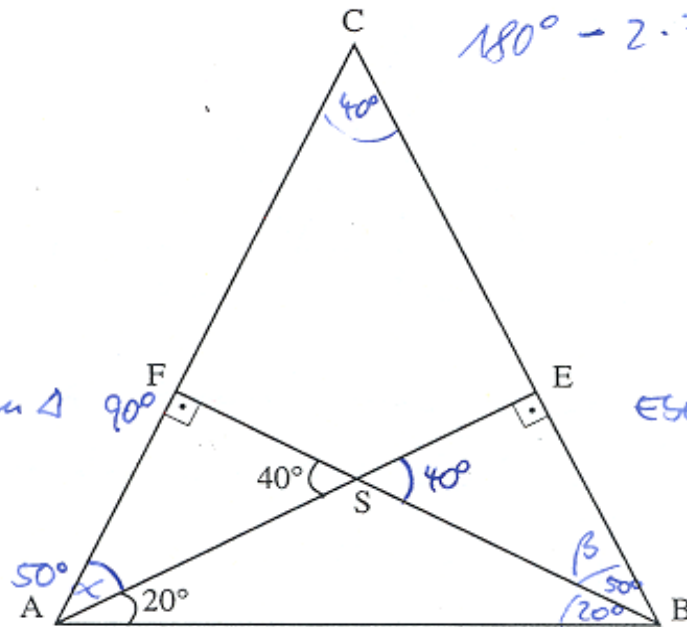
Lösungen der Aufgaben im Vergleich





Lösung der Aufgabe K18 von Marco (LK Mathematik)

Die Winkelsumme
der Winkel in einem Δ
ist 180°
 $\alpha = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ$
 $= \underline{\underline{50^\circ}}$



Da behauptet wird, dass das ΔABC gleichschenklich ist,
benutzen wir diese Behauptung als Voraussetzung.
 \Rightarrow Der Winkel $\angle SEB = 40^\circ$.
Da der Winkel in $A (= 70^\circ)$ ~~und~~ β gleich ist mit dem
Winkel in $B (= 70^\circ)$, ist ~~das~~ der Abstand von \overline{AC}
gleich dem Abstand von \overline{BC} .
Das Dreieck ist gleichschenklich.

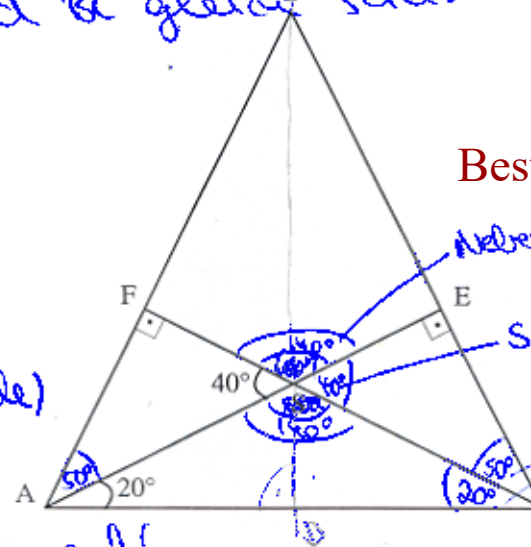
Lösung der Aufgabe K18 von Fernanda (Leistungskurs)

zu zeigen: $\overline{AC} = \overline{BC}$ gezeigt ist:
 $\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAC \quad \checkmark \quad (70^\circ)$

Ergebnis: Da die beiden Winkel der Grundseite \overline{AB} gleich sind, müssen auch die Strecken \overline{AC} und \overline{BC} gleich sein.

Zusammenhang
zwischen Winkeln und
Seiten:

Pythagoras:
 $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$
 $\overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{BC}^2$
 da $\overline{AD} = \overline{BD}$
 (Seitenhalbierende)
 ist $\overline{AC} = \overline{BC}$,
 da Längen nicht negativ
 sind $\overline{AC} = \overline{BC}$



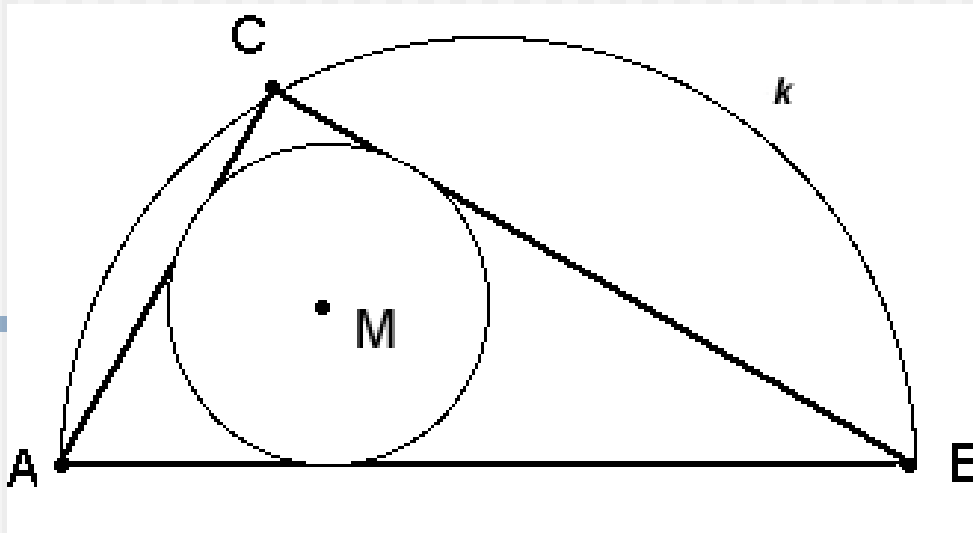
Bestimmung von $\sphericalangle ABC$

Nebenwinkel zusammen 180°

Scheitelwinkel sind gleich

Winkelsumme im Dreieck 180°

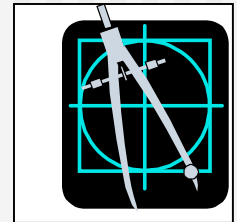
\rightarrow gleichschenklig



\overline{AB} ist der Durchmesser eines Halbkreises k . C ist ein beliebiger Punkt auf dem Halbkreis (verschieden von A und B), und M ist der Mittelpunkt des Inkreises von $\triangle ABC$.

Dann

- A. ändert sich die Größe von $\angle AMB$, wenn sich C auf k bewegt.
- B. bleibt die Größe von $\angle AMB$ für jede Lage von C gleich, kann aber, ohne den Radius zu kennen, nicht berechnet werden.
- C. $\angle AMB = 135^\circ$ für alle C ,
- D. $\angle AMB = 150^\circ$ für alle C .



Schwierigkeit: 741 (D: 24%)

LUCIA (Grundkurs)

„ c) und d) können schon mal nicht zutreffen, weil ... Pythagoras ... hat gesagt, dass der Winkel immer rechtwinklig ist in C nach diesem Kreis. Also treffen die schon mal nicht zu. Deshalb kann a) auch nicht zutreffen, weil sich die Größe des Winkels nicht ändert, wenn sich C auf k bewegt. Also nehmen wir b). Ist das Einzige was übrig bleibt. Das kommt dann nämlich auch ganz gut hin, weil der Winkel immer gleich bleibt. Berechnet werden kann er nicht, aber wir wissen wahrscheinlich, dass er 90 Grad ist. “

LUCIA (Grundkurs)

„Rein gefühlsmäßig würde ich sagen, der Winkel ... hat immer 135 Grad, weil sich dieser Winkel ja auch nicht verändert. Aber mathematisch ist das nicht gerade.“

Ja doch, also ich gehe mal davon aus, wenn dieser Winkel immer 90 Grad bleibt, wie ich das ja schon vorhin erklärt habe und das hoffentlich richtig ist, dann sehe ich keinen Grund für diesen Winkel, warum der sich verändern sollte, wenn sich das Dreieck fortbewegt.“

LUCIA (Grundkurs)

- Evidenz gegen eigene Annahmen wird nicht generiert;
- Widersprüche zwischen Evidenz und Theorie führen nicht zur Modifikation der Theorie („Berechnet werden kann er nicht, aber wir wissen wahrscheinlich, dass er 90 Grad ist.“);
- Empirische Argumente wechseln im Verlauf der Problemlösung zu mathematischen Argumenten („dann sehe ich keinen Grund für diesen Winkel, warum der sich verändern sollte“).

KONSTANZE (Grundkurs)

Zu a): „Der Winkel bei C bleibt gleich. Bleibt der gleich? Der Kreis wird weggerollt, deswegen bleibt der Winkel auch gleich.“

Zu b): „Doch, der Winkel kann bestimmt berechnet werden, auch ohne den Radius.“

„Der Winkel bleibt immer gleich, da bin ich mir ganz sicher. Aber den kann man bestimmt berechnen, deswegen kann ich b) nicht ankreuzen.“

Zu c) und d): „Er bleibt gleich. Was mache ich jetzt? Berechnen kann ich ihn nicht. Glaub ich nicht. Ohne irgendwelche Werte.“

KONSTANZE

(Grundkurs)

- Hypothesen werden früh angenommen, auch wenn Alternativerklärungen nicht ausgeschlossen sind;
- Plausibilitätsargumente werden wesentlich zur Bearbeitung herangezogen („doch, der Winkel kann bestimmt berechnet werden“);
- Es wird kein angemessener Plan für die Lösung entwickelt;
- Evidenz gegen eigene Annahmen wird nicht generiert („der Winkel bleibt gleich, da bin mir ganz sicher“), insbesondere ist die notwendige Exploration der Problemstellung weitestgehend unvollständig.

Merle (Leistungskurs Mathematik Jg. 13)

„Mit Beweisen habe ich so oder so meine Schwierigkeiten. Das schreckt mich eh immer ganz ab, wenn man, Also ich weiß auch nicht direkt, wie man an Beweise genau rangehen muss.

Man stellt 'ne Behauptung auf, so und so muss es sein, und dann beweist man das, aber da hab' ich halt einfach meine Probleme mit. Ich würde das halt einfach, ja, übersehen **und immer so 'n bisschen hin- und hertüddeln**, aber 'n richtiger Beweis ist es ja in dem Sinne nicht. “

Didaktische Konsequenz

- Das Beweisbedürfnis muss geweckt werden.
- Das Verständnis für ein axiomatisches Vorgehen muss langsam, aber explizit aufgebaut werden.

Geeignete Beispiele haben keine offensichtliche Lösung, also z.B.

- Satz des Thales
- Umfangswinkelsatz
- Satz des Pythagoras

