# Kapitel 01 Grundlagen

Freitag, 22. März 2019 12:11

→ Einführungsfolien

<u>Axiomatik</u>:
Beschreibe eine Geometrie/geom. Setting als etwas, das eine Liste von Eigenschaften erfüllt.
Diese Eigenschaften heißen <u>Axiome</u>.

- Axiome ≙ Spielregeln für die zu betreibende Mathematik
- geg. ein festes <u>Axiomensystem</u> (= Menge von Axiomen)
  So werden all die Aussagen (in dem Axiomensystem) als wahr betrachtet, die aus diesen Axiomen abgeleitet werden können.
- andere Aussagen werden nicht als wahr betrachtet und sind u.U. nicht beweis- oder widerlegbar.

Grundsätzlicher Vorteil eines axiomatischen Zugangs: leicht anpassbar
⇝ ändern der Axiome beschreibt möglicherweise eine neue Geometrie.

<u>Ziel</u>: Wir wollen zunächst die eukl. Ebene (und später andere Geo-

Ebene (und später andere Geometrien) axiomatisch beschreiben.

Axiomensystem ← legt Objekte und deren grundlegenden Beziehungen zueinander fest

≠

Modell ← Realisierung / Bsp für etwas, das die Liste der Axiome erfüllt

verschiedene Modelle können die selbe Geometrie beschreiben

<u>Elementare Eigenschaften der euklidischen Geometrie:</u>

(1) Abstände zwischen Punkten messen
(2) Zu je zwei Punkten existiert eine Verbindungsgerade
(3) Winkel sind messbar
(4) Drehen und Verschieben ändert die Geometrie nicht
(5) Reskalieren ändert Geometrie nicht.

## 1.1. Einfachstes Modell der euklidischen Ebene

Ein Punkt in der euklidischen Ebene ist ein Paar $(x,y)$ mit $x,y \in \mathbb{R}$. Der Abstand zwischen $(x_1,y_1)$ und $(x_2,y_2)$ ist definiert durch

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}.$$

numerisches Modell der eukl. Ebene

- ⊕ kurz
- ⊕ Eigenschaften eben leicht verifizierbar
- ⊖ nicht klar warum so definiert

## (1) Abstände messen:

**Def 1.2** metrische Räume:

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Metrik auf $X$ ist eine Abbildung $d: X \times X \to \mathbb{R}$ s.d. $\forall x,y,z \in X$ gilt:

(a) $d(x,y) \geq 0$ (Positivität)

(b) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)

(b) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)

(c) $x = y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$ (nicht-ausgeartet)

(d) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecksungleichung)

Ein <u>metrischer Raum</u> ist ein Paar $(X,d)$ mit $X \neq \emptyset$ Menge und $d$ eine Metrik auf $X$.
Der Wert $d(x,y)$ heißt <u>Abstand</u> von $x$ und $y$.

<u>Bem</u>: 1) Wir sind nicht festgelegt für die Wahl von $X$!

2) Die selbe Menge $X$ kann verschiedene Metriken tragen!
$\longrightarrow$ ÜA zu Metriken auf $\mathbb{R}^2$

<u>Bsp 1.3</u> für metrische Räume

(0) diskrete Metrik:
Sei $X$ beliebige Menge, $(X \neq \emptyset)$
definiere $\forall x,y \in X$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = y \\ 1 & \text{wenn } x \neq y \end{cases}$$

(1) $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik (siehe Def 1.1 oder (3)a) unten)

Metrik (siehe Def 1.1 oder (3)a) unten)

(2) $(\mathbb{R}, d)$ mit $d(x,y) = |x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$
wir nennen diesen Raum <u>reelle Gerade</u>

(3) andere Metriken auf der Menge $\mathbb{R}^2$:
Bezeichne mit $\mathbb{R}^2$ alle Paare $(x,y)$ mit $x,y \in \mathbb{R}$.
Seien $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ zwei Punkte in $\mathbb{R}^2$.

<u>Betrachte</u>

a) Euklidische Metrik

$$d_2(P_1,P_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

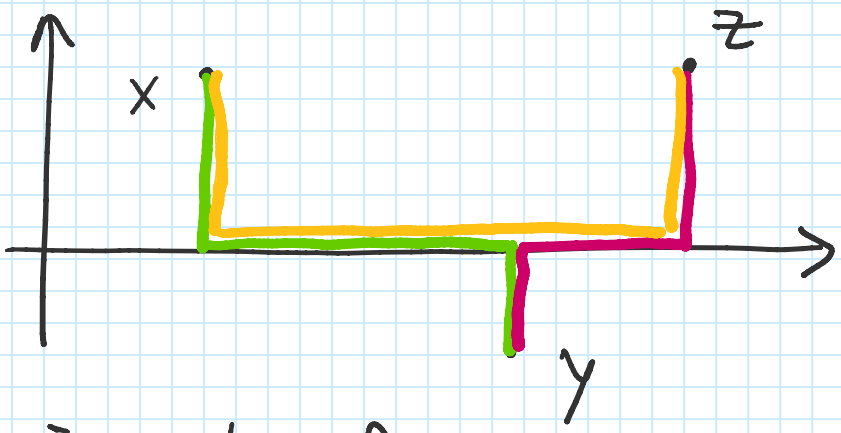
b) Manhattan Metrik

$$d_1(P_1,P_2) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2|$$

c) Maximumsmetrik

$$d_\infty(P_1,P_2) = \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$$

d) Holzfällermetrik:




kürzeste Wege zwischen Pkten

<u>Frage</u>: $\boxed{\text{evtl mit dicker}}$

Ist $d_{-\infty}(P_1, P_2) := \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ auch eine Metrik?

## (2) Was sind Geraden?

<u>Def 1.4</u> Seien $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ zwei metrische Räume. Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt <u>abstandserhaltend</u> wenn $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$.

Eine bijektive, abstandserhaltende Funktion nennen wir <u>Isometrie</u>.

Funktion nennen wir <u>Isometrie</u>.

Existiert eine Isometrie von $X$ nach $Y$ so nennen wir $X$ und $Y$ <u>isometrisch</u>.

Ein <u>Automorphismus</u> eines metrischen Raumes $X$ ist eine Isometrie $X \to X$.

<u>Bsp</u> 1) $X = \mathbb{R}$ mit $d(x,y) = |x-y|$
$Y = \mathbb{R}^2$ mit $d = d_2$. (vergl 1.3(3))

dann ist die Abb. $f: X \to Y$ mit $x \mapsto (x,0)$ abstandserhaltend aber keine Isometrie.

2) $X = \mathbb{Z}$, $d(x,y) = |x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{Z}$
dann ist $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $x \mapsto x+a$ ein Automorphismus für alle $a \in \mathbb{Z}$.

<u>Def 1.5</u> Eine Teilmenge $l$ eines metr. Raumes $X$ heißt <u>Gerade</u>, wenn $l$ isometrisch zur reellen Gerade ist. Eine <u>Halbgerade</u> in $X$ ist eine

Eine <u>Halbgerade</u> in $X$ ist eine Teilmenge isometrisch zu $[0,\infty)$ und eine <u>Strecke</u> (<u>Intervall</u>) der Länge $a$ ist eine Teilmenge isometrisch zu $[0,a]$.

Liegen drei Punkte auf einer Geraden so nennen wir die Punkte kolinear

<u>Bem:</u> 1) Es kann im Allgemeinen mehrere Geraden durch zwei gegebene Punkte geben

2) Schreibe für eine fest gewählte Gerade durch $x$ und $y$ auch $(xy)$.

3) für eine Halbgerade*, die in $x$ startet und durch $0$ geht schreiben wir auch $[xy)$

* Eine <u>Halbgerade</u> ist das Bild $l$ einer Isometrie $f: \mathbb{R}^+ \to l \subset X$. Sie <u>startet in $x$</u> wenn $f(0) = x$.

Eine Strecke $T$ ist eine Teil-

Eine <u>Strecke</u> $I$ ist eine Teilmenge in $X$, die isometrisches Bild eines Intervalls $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ist.

<u>Lemma 1.6</u>

Sind $x, y, z$ kolinear und $\overbrace{d(x,z) \geq d(x,y)}^{(1)}$ sowie $d(x,z) \geq d(y,z)$ dann ist

$$d(x,z) = d(x,y) + d(y,z). \quad (*)$$

<u>Beweis</u> Sei $l$ Gerade, $x, y, z \in l$.

Sei $f: l \to \mathbb{R}$ Isometrie und oBdA $f(x) = 0$ und $f(z) > 0$.

Dann ist $d(x,z) = d(0, f(z)) = f(z)$

und $d(x,y) + d(y,z) = \underbrace{f(y) + d(f(z), f(y))}_{(2)}$

1) $f(y) > 0$: $\Rightarrow (2) = f(y) + (f(z) - f(y))$

$(1) \Rightarrow f(z) \geq f(y)$

und es gilt wegen $f(z) = f(y) + f(z) - f(z)$.

2) $f(y) < 0$: dann ist

$$f(z) = d(x,z) \geq d(y,z) = |\underbrace{f(y)}_{<0} - \underbrace{f(z)}_{\geq 0}|$$

$$> f(z) \quad ↯$$

$> f(z)$ ↯

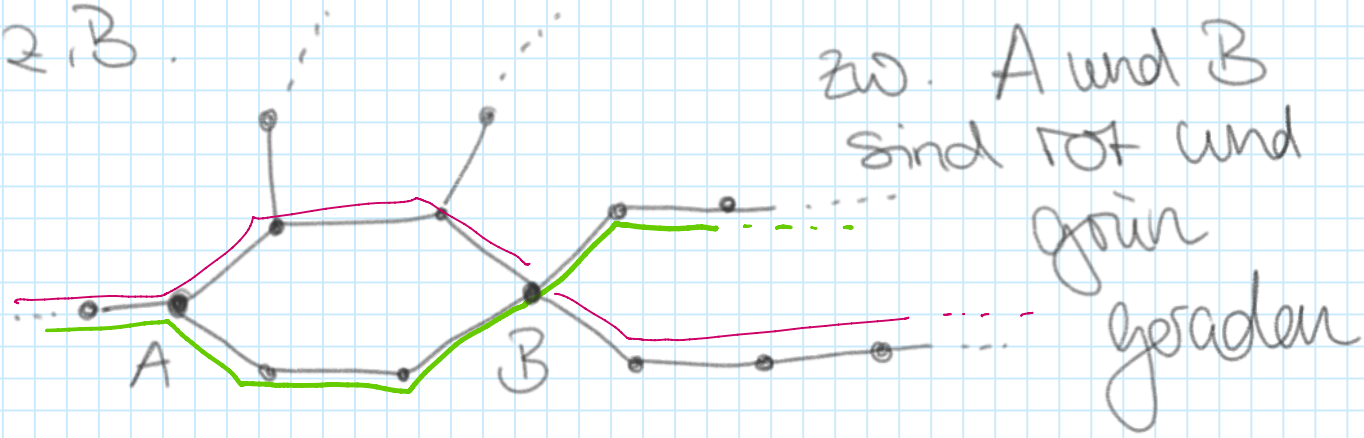
also ist $f(y) > 0$ und die Beh. gilt.

$\square$

<u>Bsp. 1.7</u> Man kann einen Graphen als metrischen Raum auffassen! z.B. durch folgende Konvention:

- jede Kante hat Länge 1
- der Abst. zweier beliebiger Pkte in einem Graphen ist die Länge des kürzesten Verbindungspfades, wobei Länge von Pfaden stückweise in Kanten gemessen und addiert wird.

z.B.



# (3) Wir wollen Winkel messen

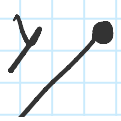
**Def 1.8**

Ein <u>Winkel</u> in einem metrischen Raum ist ein geordnetes(!) Paar von Halbgeraden oder Strecken, die im selben Punkt $O$ anfangen. Der Punkt $O$ heißt <u>Ecke</u> des Winkels

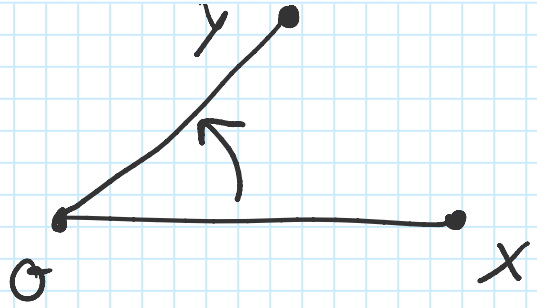
Schreibe $\angle XOY$ für den Winkel zwischen den Strecken $OX$ und $OY$. Für das (noch zu definierende) <u>Maß eines Winkels</u> $\angle XOY$ schreibe $\measuredangle XOY$.

<u>Achtung</u>:

- Winkel sind geordnete Paare, d.h. die Reihenfolge ist wichtig!
- Wir veranschaulichen Winkel immer in mathematisch positive Richtung <u>gegen den Uhrzeigersinn</u> (Konvention)



(Konvention)




<u>Achtung</u>: $\angle xoy$ und $\measuredangle xoy$ sind zwei konzeptionell verschiedene Dinge!

Es gilt insbesondere:

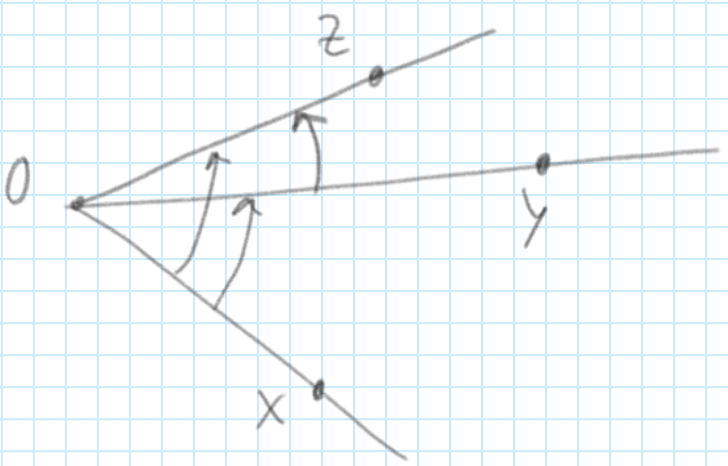
Ist $\angle xoy = \angle x'o'y'$

Dann gilt $[ox) = [o'x')$ und $o = o'$ weiter $[oy) = [oy')$.

Ist $\measuredangle xoy = \measuredangle x'o'y'$ haben die Halbgeraden lediglich jeweils den selben Winkel. Die Punkte $x, x'$ $o, o'$ und $y, y'$ müssen nicht übereinstimmen.

<u>Bem</u>: Wir werden Größen von Winkeln mit Zahlen in $(-\pi, \pi]$ ausdrücken.

<u>Exkurs 19</u> Rechnen in $\mathbb{R}$ modulo $2\pi$




$\rightsquigarrow$ 3 Winkel

$\angle xoy$

$\angle yoz$

$\angle xoz$

Es sollte $\measuredangle xoz$ mit $\measuredangle xoy + \measuredangle yoz$ übereinstimmen (bis auf ganze Rotation)

Wir werden schreiben:

$$\measuredangle xoy + \measuredangle yoz \equiv \measuredangle xoz$$

<u>Def.</u> Schreibe $\alpha \equiv \beta$ wenn gilt

$$\alpha = \beta + 2\pi n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

und sage <u>$\alpha$ ist kongruent $\beta$ modulo $2\pi$</u>.

Bem: Wenn gilt $\alpha \equiv \beta$ & $\alpha' \equiv \beta'$ dann:

$\alpha + \alpha' \equiv \beta + \beta'$, $\alpha - \alpha' \equiv \beta - \beta'$ und

$n\alpha \equiv n\beta \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Also gilt auch $r\alpha \equiv r\beta$ für $r \in \mathbb{R}$

$\alpha \equiv \beta$ [illegible]

<u>Aber</u> i.A nicht $r \cdot \alpha \equiv r \cdot \beta$ für $r \in \mathbb{R}$

z.B. $\pi \equiv -\pi$ aber $\frac{1}{2}\pi \not\equiv -\frac{1}{2}\pi$

<u>Bem 1.10</u>

Wir wollen am Ende, dass die Winkelmessung stetig von den Punkten $x, o, y$ abhängt. D.h. wenn man einen der Punkte bewegt "springt" der Wert $\measuredangle xoy$ des Winkels nicht.

## (4) kongruente Dreiecke

ein Ausdruck dessen was durch Rotieren und Verschieben unverändert bleibt.

<u>Def.</u> 1.11 Dreiecke:

Ein <u>Dreieck</u> in einem metrischen Raum $X$ ist ein geordnetes Tripel von Punkten $x, y, z$ in $X$.

Schreibe $\Delta xyz$

von Punkten $x, y, z$ in $X$.
Schreibe $\Delta xyz$.

Achtung:
$\Delta xyz$
$\neq \Delta xzy$

Zwei Dreiecke $\Delta xyz$ und $\Delta x'y'z'$ sind <u>kongruent</u> (schreibe $\Delta xyz \cong \Delta x'y'z'$) wenn gilt:
$\exists$ Automorphismus $f: X \to X$
s.d. gilt: $x' = f(x)$, $y' = f(y)$
und $z' = f(z)$.

<u>Fakt</u>: $\cong$ ist Äquivalenzrelation

d.h. $\Delta xyz \cong \Delta xyz$ und

- wenn $\Delta xyz \cong \Delta x'y'z'$ dann auch $\Delta x'y'z' \cong \Delta xyz$
- wenn $\Delta xyz \cong \Delta x'y'z'$ und $\Delta x'y'z' \cong \Delta x''y''z''$ dann auch $\Delta xyz \cong \Delta x''y''z''$

das folgt aus der Tatsache, dass für $f, g: X \to X$ Automorphismen auch $f^{-1}$ und $f \circ g$ —"— sind.

<u>Bem:</u> Es gilt:

$$\Delta x'y'z' \cong \Delta xyz \implies \begin{array}{l} d(x,y) = d(x',y') \\ d(y,z) = d(y',z') \\ d(z,x) = d(z',x') \end{array}$$

„$\Leftarrow$" gilt i.A. nicht

(zB falsch für Manhattan Metrik *
aber richtig für diskrete Metrik)

* vergl p. 17 [P1].