Kapitel 03 klassische Aussagen der euklidischen Geometrie

Freitag, 5. April 2019 14:23

1) Kongruente und ähnliche Dreiecke

Bereits in der axiomatischen Charakterisierung der euklidischen Ebene haben wir die SWS-Kongruenz zweier Dreiecke gesehen.

Wir zeigen jetzt:

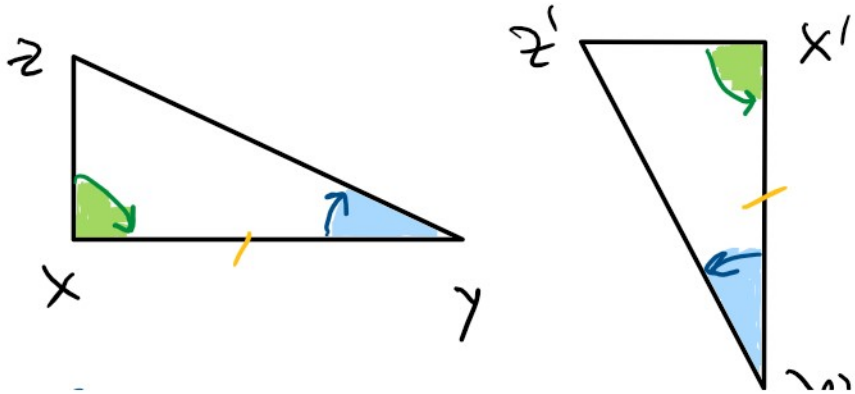
Satz 3.1 (v) (WSW)

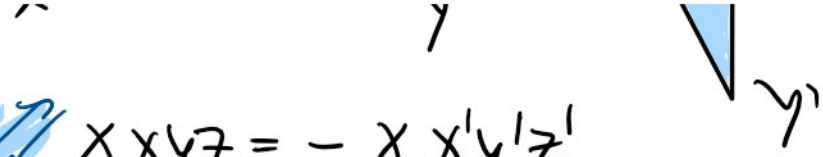
Seien Δxyz, $\Delta x'y'z'$ zwei Dreiecke. Sei weiter
$d(x,y) = d(x',y')$ und
$\measuredangle xyz = \pm \measuredangle x'y'z'$ sowie
$\measuredangle zxy = \pm \measuredangle z'x'y'$.
Außerdem sei $\Delta x'y'z'$ nicht degeneriert.
Dann gilt

$$\Delta xyz \cong \Delta x'y'z'$$

d.h. die beiden Dreiecke sind kongruent.

Bsp.





$\measuredangle xyz = -\measuredangle x'y'z'$

$\measuredangle zxy = -\measuredangle z'x'y'$

$d(x,y) = d(x',y')$

<u>Bem.</u> Für degenerierte Dreiecke gilt Satz 3.1 nicht.
Betrachte zB zwei degenerierte Dreiecke mit 2,4,6 und 1,5,6 als deren Seitenlängen

<u>Beweis Satz 3.1</u>

Ende VL 3

Mit Satz 2.11 gilt:

① $\measuredangle xyz = \measuredangle x'y'z'$ und $\measuredangle zxy = \measuredangle z'x'y'$

oder

② $\measuredangle xyz = -\measuredangle x'y'z'$ und $\measuredangle zxy = -\measuredangle z'x'y'$

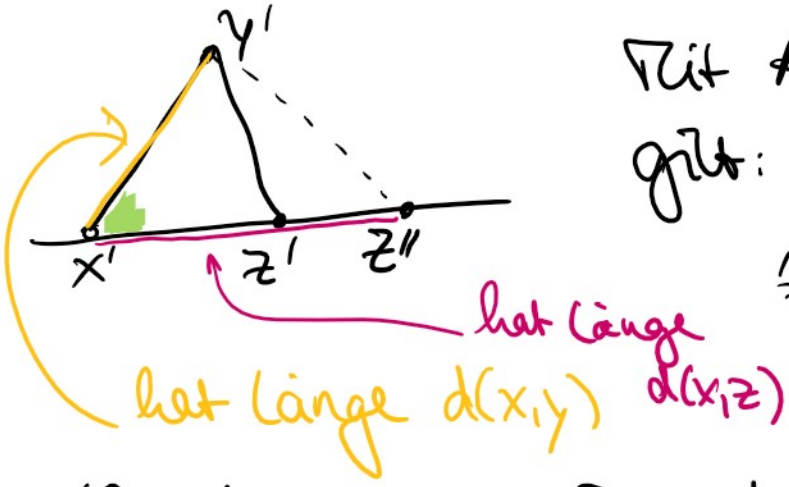
weil in einem Dreieck die im UZS gelesenen Winkel alle das selbe Vorzeichen haben.

Wir betrachten Fall ① (Fall ② geht analog).

Sei z'' auf der Halbgeraden durch z' mit

Sei z'' auf der Halbgeraden durch z' mit Basis x' der eind. Punkt für den gilt:

$$d(x', z'') = d(x, z).$$



Mit Axiom IV SWS gilt: $\Delta x'y'z'' \cong \Delta xyz$

Weil die beiden Dreiecke aber jetzt kongruent sind müssen die Winkelmaße an y' und y übereinstimmen, d.h.:

$$\measuredangle x'y'z'' \overset{\text{gilt mit IV}}{=} \measuredangle xyz \overset{\text{gilt nach Vor. im Satz}}{=} \measuredangle x'y'z'.$$

Mit Axiom III a) erhalten wir:

$$\underbrace{[y'z')}_{\text{Halbgerade an } y' \text{ durch } z'} = \underbrace{[y'z'')}_{\text{Halbgerade an } y' \text{ durch } z''}$$

weil der Winkel zw Halbgerade an y' durch x' gleich ist.

Außerdem liegt z'' auf der Geraden durch y', z' sowie auf der Geraden durch x', z'.

Weil $\Delta x'y'z'$ nicht dezeneriert ist

Weil $\Delta x'y'z'$ nicht degeneriert ist ist die Gerade durch x', y' von der durch y', z' verschieden.

Axiom II $\Rightarrow z' = z''$.

Also ist $\Delta x'y'z' = \Delta x'y'z'' \cong \Delta xyz$.

$\square$

<u>Satz 3.2</u> (SSS)

Für zwei Dreiecke $\Delta = \Delta(a,b,c)$ und $\Delta' = \Delta(a',b',c')$ gelte

$d(a',b') = d(a,b)$

$d(b',c') = d(b,c)$ und

$d(c',a') = d(c,a)$

dann gilt $\Delta(a,b,c) \cong \Delta(a',b',c')$.

<u>Beweis:</u> siehe Übungen. $\square$

<u>Def 3.3</u> Zwei Dreiecke $\Delta = \Delta(a,b,c)$ und $\Delta' = \Delta(a',b',c')$ heißen <u>ähnlich</u>, notiert mit $\Delta \sim \Delta'$, wenn gilt:

(1) ihre Seiten sind proportional

d.h. $d(a',b') = k \cdot d(a,b)$

$d(b',c') = k \cdot d(b,c)$ und $d(a',c') = k\, d(a,c)$

für ein $k > 0$

$d(a,b) = k \cdot d(a',b')$ und $d(a,c) = k \cdot d(a',c')$

für ein $k>0$

und

(2) correspondierende Winkel sind gleich

$$\measuredangle a'b'c' = \measuredangle abc$$
$$\measuredangle b'c'a' = \measuredangle bac$$
$$\measuredangle c'a'b' = \measuredangle cab.$$

<u>Bem</u>: • Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

• Ist $\Delta \sim \Delta'$ mit $k=1$ so gilt $\Delta \cong \Delta'$.

• Axiom V liefert ein Kriterium das garantiert, dass zwei Dreiecke ähnlich sind. (Warum?!)

<u>Satz 3.4</u> (Ähnlichkeitskriterien)

Zwei Dreiecke $\Delta = \Delta(a,b,c)$ und $\Delta' = \Delta(a',b',c')$ sind ähnlich, wenn eine der drei folgenden Eigenschaften gilt:

(i) für ein $k>0$ gilt:

$$d(a,b) = k \cdot d(a',b')$$
$$d(a,c) = k \cdot d(a',c') \text{ und}$$
$$\measuredangle bac = \pm \measuredangle b'a'c'.$$

$\measuredangle bac = \pm \measuredangle b'a'c'$.

(ii) Das Dreieck Δ' ist nicht-degeneriert und
$\measuredangle abc = \pm \measuredangle a'b'c'$ und
$\measuredangle bac = \pm \measuredangle b'a'c'$.

<u>Beweis:</u> Wir wenden jeweils Axiom V an und den entsprechenden Kongruenzsatz. Los geht's.

Setze $k = \dfrac{d(a,b)}{d(a',b')}$. Wähle Punkte $b'' \in [a'b')$ und $c'' \in [a'c')$ so, dass $d(a',b'') = k \cdot d(a',b')$ und $d(a',c'') = k \cdot d(a',c')$.

Mit Axiom V gilt dann:

$$\Delta(a',b',c') \sim \Delta(a,b'',c'').$$

Mit SWS oder WSW folgt dann $\Delta(a',b'',c'') \cong \Delta(a,b,c)$.

Somit folgt Beh. $\square$

3) Satz des Pythagoras

Um den S.d.P. aus den Axiomen

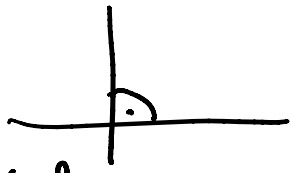
Um den S.d.P. aus den Axiomen beweisen zu können müssen wir zunächst einmal sagen, was ein rechter Winkel ist.

Def 3.5 X, O, Y 3 Punkte

Ist $|\sphericalangle XOY| = \begin{cases} \pi/2 \\ < \pi/2 \\ > \pi/2 \end{cases}$ so heißt $\angle XOY$ <u>rechter</u> Winkel, <u>spitzer</u>, <u>stumpfer</u>

Notation 3.6

Wir markieren rechte Winkel mit einem Punkt. Etwa so:



Ist $\angle XOY$ ein rechter Winkel so nennen wir die Halbgeraden $[OX)$ und $[OY)$ <u>senkrecht</u> und schreiben $[OX) \perp [OY)$.

Sei M Mitte von X, Y auf der Strecke zwischen X und Y. Dann nennen wir die eindeutige Gerade l durch M, die auf $[XY)$ senkrecht steht

die auf (xy) senkrecht steht
<u>Mittelsenkrechte</u> auf $\overline{xy}$.

<u>Satz 3.7</u> (Mittelsenkrechte) (v)

Seien x, y zwei Punkte.
Dann ist die Mittelsenkrechte l auf der Strecke von x nach y geg durch:

$$l = \{ z \mid d(x,z) = d(y,z) \}.$$

<u>Bem.</u> (v) Man kann auch axiomatisch formal zeigen, dass die Mittelsenkrechte eindeutig ist und es keine zwei geraden durch den Mittelpkt von x und y geben kann, die auf der Strecke senkrecht stehen.

<u>Beweis</u> (weglassen)

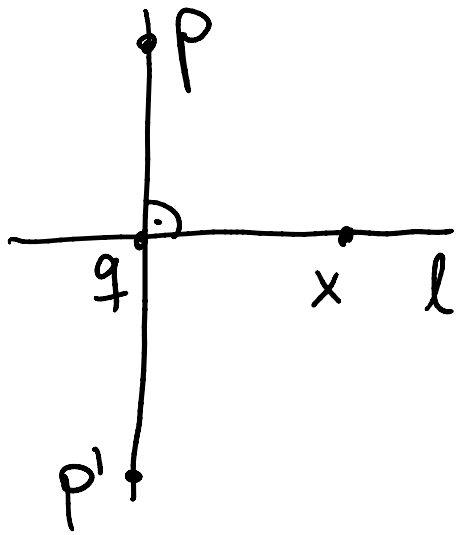
<u>Lemma 3.8</u> ("senkrecht ist am kürzesten") (v)

Sei q der <u>Fußpunkt</u>* des Punktes p auf der geraden l. (Ann: $p \notin l$).
Dann gilt $d(p,x) > d(p,q)$
für alle Punkte $x \neq q$ auf l.

* q ist Schnitt der senkrechten

* q ist Schnitt der senkrechten Geraden auf l, die durch P geht (streng genommen müssten wir beweisen, dass es diese gibt und, dass sie eindeutig ist).

<u>Bem</u>: Ist p auf l setze den Fußpunkt gleich p, d.h. $p = q$. Dann ist $d(p,q) = 0$ und die Aussage des Satzes gilt trotzdem.



<u>Beweis</u>

Sei $p' \neq p$ Punkt auf der Geraden (pq) so, dass $d(p,q) = d(p',q)$.

Dann ist q Mitte von p und p' und die Gerade l ist Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{pp'}$. Also gilt:

$$d(p,x) = d(p',x) \text{ und}$$

$$d(p,q) = d(p',q) = \frac{1}{2} \cdot d(p,p').$$

$$d(p,q) = d(p',q) = \frac{1}{2} \cdot d(p,p').$$

Es ist $l \cap \overline{pp'} = \{q\}$ der einzige Schnittpunkt von l mit der Strecke von p nach p'.

Also ist insbesondere $x \notin \overline{pp'}$.

<u>Beh:</u> $d(p,x) + d(p',x) > d(p,p')$.

Gilt die Beh, so können wir zeigen

$$d(p,x) > d(p,q).$$

Denn:

$$2d(p,x) = d(p,x) + d(p',x) > \underset{\substack{\parallel \\ 2d(p,q)}}{d(p,p')}.$$

<u>Beweis Beh:</u>

Um die Beh. zz. reicht es nachzuweisen, dass aus

$$d(p,x) + d(p',x) = d(p,p')$$

folgt, dass x auf der Strecke von p nach p' liegt.

Das erhalten wir aber leicht aus Satz 3.2 über SSS Kongruenz.

$\square$

Um den Satz des Pyth. formulieren zu können benötigen wir noch folgende Begriffe:

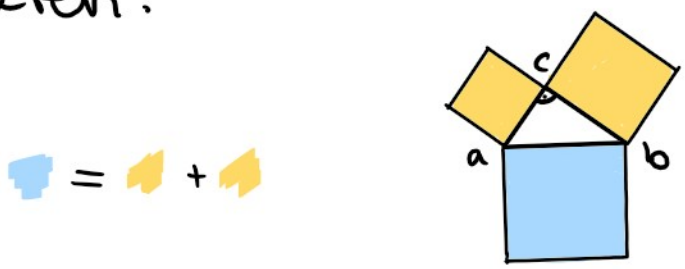
Def 3.9 Ein Dreieck heißt <u>rechtwinklig</u>, wenn einer seiner Winkel ein rechter ist. Die Seite gegenüber des rechten Winkels heißt <u>Hypothenuse</u>, die beiden anderen <u>Katheten</u>.

3.10 Satz des Pythagoras (benutzt Axiom 5)

Sei $\Delta = \Delta(a,b,c)$ ein rechtwinkliges Dreieck an c. Dann gilt:

$$d(a,c)^2 + d(b,c)^2 = d(a,b)^2.$$

Oder, in Worten, das Quadrat der Länge der Hypothenuse entspricht dem Quadrat der Längen der Katheten.



Beweis: Sei d der Fußpunkt von c

Beweis Sei d der Fußpunkt von c auf der Strecke von a nach b.

Mit Lemma 3.6 gilt:

$$d(a,d) < d(a,c) < d(a,b) \text{ und}$$
$$d(b,d) < d(b,c) < d(a,b).$$

Also ist d zwischen a und b und insbesondere gilt

$$(*) \quad d(a,d) + d(d,b) = d(a,b).$$

Mit Satz 3.4 (ii) gilt:

$$\boxed{\Delta(a,d,c) \sim \Delta(a,c,b) \sim \Delta(c,d,b).}$$

Versuchen Sie einmal diese Aussage im Detail nachzuvollziehen.
(Was entspricht a, b, c im Satz 3.4 (ii) hier? Welche Winkel betrachten wir genau?)
Oder nehmen Sie es als Faktum an, dass man dies aus dem genannten Satz in unserer Situation ableiten kann.

Insbesondere ist

$$\frac{d(a,d)}{d(a,c)} = \frac{d(a,c)}{d(a,b)} \text{ und } \frac{d(b,d)}{d(b,c)} = \frac{d(b,c)}{d(b,a)}.$$

Letzteres können wir umschreiben zu

$$d(a,c)^2 = d(a,d) \cdot d(a,b)$$
$$d(b,c)^2 = d(a,b) \cdot d(b,d).$$

Addiert man diese [illegible]

Addiert man diese auf, so folgt mit (*):

$$d(a,c)^2 + d(b,c)^2 = d(a,b)\cdot\big(d(a,d) + d(b,d)\big)$$
$$= d(a,b)^2 .$$

$\square$

<u>Bem.</u> Es gilt tatsächlich auch die Umkehrung des S.d. Pythagoras:

Gilt für ein Dreieck $\Delta(a,b,c)$ die genannte Gleichung für die Seitenlängen, so ist der Winkel bei c ein rechter Winkel.

4) Parallele Geraden

Wir untersuchen jetzt das Verhalten paralleler Geraden in der euklidischen Ebene.

In der letzten Vorlesung haben wir bereits folgende Aussage ohne Beweis verwendet:

Eindeutigkeit des Senkrechten: (V)

Zu einem gegebenen Punkt P und einer gegebenen Gerade l existiert genau eine Gerade l', die durch P geht und senkrecht auf l ist.

Der Schnitt von l mit l' ist gerade der oben beschriebene Fußpunkt.

3.11 Notation:

Zwei Geraden l, m <u>schneiden sich</u>, wenn sie einen Punkt gemeinsam haben.
Wir schreiben $l \nparallel m$.
Zwei Geraden l, m sind <u>parallel</u>, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben.
Schreibe dann $l \parallel m$.
Sind $l \nparallel m$, dann sind l und m <u>senkrecht</u>, wenn sie an ihrem Schnittpunkt einen rechten Winkel einschließen.
Schreibe $l \perp m$.

was sagte das nochmal?

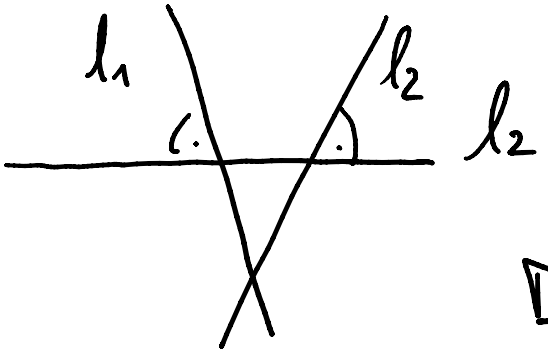
Aus Axiom II können wir sehen, dass es genau diese beiden Fälle gibt!

3.12 Lemma: (V)

Seien l_1, l_2, l_3 drei (paarweise) verschiedene Geraden.
Wenn $l_1 \perp l_2$ und $l_2 \perp l_3$ dann ist $l_1 \parallel l_2$.

Wenn $l_1 \perp l_2$ und $l_2 \perp l_3$ dann ist $l_1 \parallel l_2$.

<u>Beweis</u>: (durch Widerspruch)
Ann $l_1 \nparallel l_3$. Dann existiert (nach Def) ein Schnittpunkt Z von l_1 und l_3.
Nach Eindeutigkeit des Senkrechten gilt $l_1 = l_3$.



$\lightning$ zu Ann
$l_1 \neq l_3$.
Also ist $l_1 \parallel l_3$. $\square$

<u>Satz 3.13</u>

Seien eine Gerade l und ein Punkt P gegeben. Dann existiert genau eine Gerade l' durch P, die zu l parallel ist.

Wir müssen zwei Sachen zeigen:
- Existenz von l'
- Eindeutigkeit von l'

<u>Beweis</u> (benutzt Axiom V).
<u>Existenz</u>: Gegeben l und P so existiert eine eindeutige Senkrechte l' auf l durch P.

Sowie eine eindeutige Senkrechte l'' auf l' durch P.
Nach Le 3.12 ist $l'' \parallel l$.

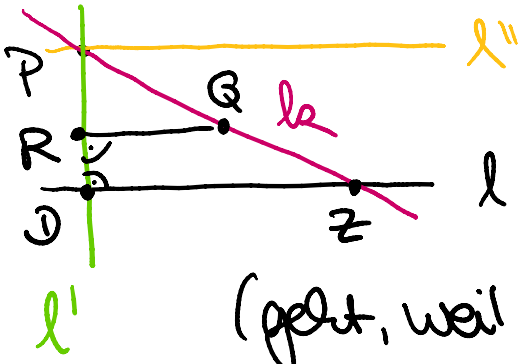
Nach Le 3.12 ist $l'' \parallel l$.

<u>Eindeutigkeit:</u>

1) $P \in l$: Dann ist $l'' = l$ (nach Def Parallelität)

2) $P \notin l$:

Konstruiere Geraden l' und l'' wie im Beweis der Existenz. Dann ist $l'' \parallel l$.
Sei k weitere Gerade durch P mit $k \parallel l$ und $k \neq l''$.



Wähle Punkt Q auf k auf der selben Seite von l'' wie l (geht, weil $l'' \cap k = P$ eindeutiger Punkt und k somit von einer Seite von l'' auf die andere wechselt in P).

Sei R Fußpunkt von Q auf l'.
Setze $D := l \cap l'$.
Dann gilt mit Le 3.12, dass l parallel zu Geraden durch P und Q ist.

Also liegen l, P, Q auf der selben Seite von l''.
Insbesondere ist also $R \in \underbrace{[PD)}_{\text{Halbgerade von } P \text{ durch } D}$.

Wähle weiteren Punkt $Z \in [PQ)$

Wähle weiteren Punkt $Z \in [PQ)$ so, dass gilt:

$$\frac{d(P,Z)}{d(P,Q)} = \frac{d(P,D)}{d(P,R)}.$$

(Strahlensatz)

Mit der SWS-Bedingung oder Axiom V gilt, dass

$$\triangle RPQ \sim \triangle DPZ.$$

Somit ist die Gerade durch Z und D senkrecht auf l' weil auch die Gerade durch R und Q auf l' senkrecht steht.

Also muss Z auf l liegen, weil es durch D genau nur l als Senkrechte gibt.
Somit ist $Z \in l \cap k$ ↯ zu $k \parallel l$. □