

Kapitel 06 Karten der Sphäre

Dienstag, 21. Mai 2019 10:55

Wir betrachten in diesem Kapitel ein ganz praktisches Problem:

Wie kann es gelingen die sphärische Geometrie gut und praktikabel in der Ebene darzustellen?

I.h. Wie zeichnet man Landkarten?

Problem: Es gibt keine Projektion der Sphäre auf die Ebene, die Winkel, Abstände und Flächen (oder Längen) erhält.

Schränkt man sich ein gibt es aber gute Projektionsmöglichkeiten.

→ vgl. Wikipedia : Kartennetzwerk

- Längentreue:

Abbildungen $f: S_{r,R} \rightarrow \mathbb{E}^2$, die

Abschätzungen $f: S_{r,0} \rightarrow \mathbb{E}^2$, die alle Abstände erhalten kann es nicht geben.

Z.B. bleibt Parallelität unter so einer Abbildung erhalten oder auch Schnittpunkte von Geraden oder Winkelsummen im Dreieck.

All diese Phänomene erhalten sich auf $S_{r,0}$ aber grundlegend anders als im \mathbb{E}^2 .

Die Existenz einer isometrischen Einbettung von $S_{r,0} \rightarrow \mathbb{E}^2$ würde dem widersprechen.

Es gibt aber Abbildungen, die in gewisse Richtungen der längs vorgegebenen Meridiane/Kreise die Länge erhalten und sonst Abstände verzerren.

Z.B. quadratische Plaktkarte

längentreue Kegelprojektion

sinusoidale Projektion

sinusoidale Projektion

• Flächentreue

Hier wird die Größe einer Teilmenge der Sphäre erhalten ihre Form aber (stark) verzerrt.

Beispiele sind:

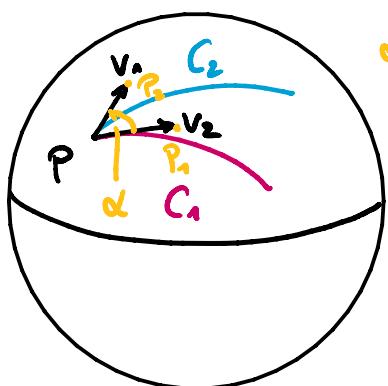
- Trollweide Projektion
- Sinusoidal projektion
- Peters-/ Gall - projektion
- Goode Projektion (zerschneidet die Karten)

Winkelstreue:

eine Projektion, die Winkel erhält
bernen wir jetzt kennen.

Def 6.1: Der Winkel zwischen zwei Kurven $C_1, C_2 : [0, 1] \rightarrow S$ auf einer Sphäre S mit $C_1(0) = C_2(0) = p$ sei

Sphäre S mit $C_1(0) = C_2(0) = P$ sei
der euklidische Winkel zwischen
den Tangentialvektoren v_1, v_2
an C_1, C_2 in P .



$$\alpha = \gamma_{P,P,P_1,P_2}$$

Wir schreiben
für α auch
 $\gamma_P(C_1, C_2)$

Def 6.2 Sei $S = S_{r,0} \subset \mathbb{R}^3$ eine
Sphäre um $O = (0, 0, 0)$. Sei $U \subset S$ offen.
Eine Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$
heißt winkelstreu, falls für alle
Paare C_1, C_2 von Kurven auf S
mit Schnittpunkt p in U gilt:

$$\gamma_p(C_1, C_2) = \gamma_{f(p)}(f \circ C_1, f \circ C_2)$$

Winkel zwischen

üblicher Winkel in \mathbb{R}^2 .

Winkel zwischen
Tangentialebene.
im \mathbb{R}^3 üblicher Winkel in \mathbb{R}^2 .

Def 6.3 (stereographische Projektion)

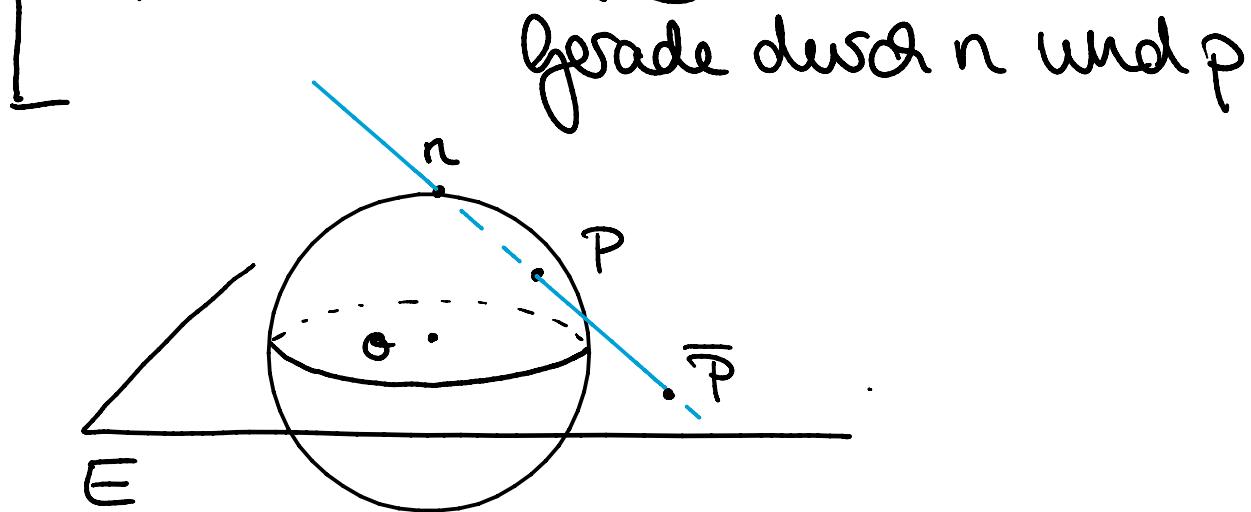
Sei S Sphäre vom Radius r um (\vec{o}) .

Sei n der Nordpol und s der
Südpol von S .

Sei weiter E die Äquatorebene
durch S .

Die stereographische Projektion

$\phi: S \setminus \{n\} \rightarrow E \cong \mathbb{R}^2$ ist definiert durch
 $P \mapsto \bar{P} := \underbrace{l(n, P)}_{\text{gerade durch } n \text{ und } p} \cap E$



Satz 6.4

Die stereographische Projektion ϕ ist
eindeutig.

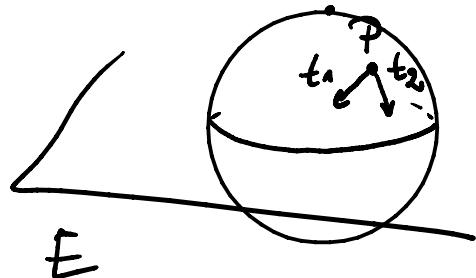
Die stereographische Projektion ϕ ist winkeltreu.

Beweis: Seien C_1, C_2 zwei Kurven mit gemeinsamem Startpunkt p und t_1, t_2 die Tangentialvektoren an t_1, t_2 für $i=1,2$.

Wir müssen zeigen:

$$\alpha := \Delta_p(C_1, C_2) = \chi_{\tilde{P}}(\phi \circ C_1, \phi \circ C_2) =: \alpha'.$$

$\stackrel{\alpha' \parallel}{\chi_p(t_1, t_2)}$



Als Hilfskonstruktion
erweitern wir die
Abbildung

$\phi: S^1 \setminus \{n\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ zu einer Abbildung
auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{n\}$.

Wir definieren $\hat{\phi}: \mathbb{R}^3 \setminus \{n\} \rightarrow E \cup \{\infty\}$

durch $q \mapsto \begin{cases} l(n, q) \cap E & , \text{ wenn } l(n, q) \cap E \neq \emptyset \\ \infty & , \text{ wenn } l(n, q) \cap E = \emptyset. \end{cases}$

Tangenten an die Sphäre in n haben
keinen Schnitt mit E und bekommen
daher formal den Wert ∞ zugewiesen.
Man kann sich " ∞ " als zusätzlichen,
unendlich entfernten Randpunkt
vorstellen.

Es gilt: $\hat{\phi}|_{S \setminus \{n\}} = \phi$.

Beh: $\hat{\phi}$ bildet Tangentialgeraden an S auf Geraden in der Ebene E ab.

Beweis der Beh: Eine Tangentialgerade l an S spannt zusammen mit dem Nordpol n von S eine Ebene auf.

$$\langle l, n \rangle = \text{Ebene } E'$$

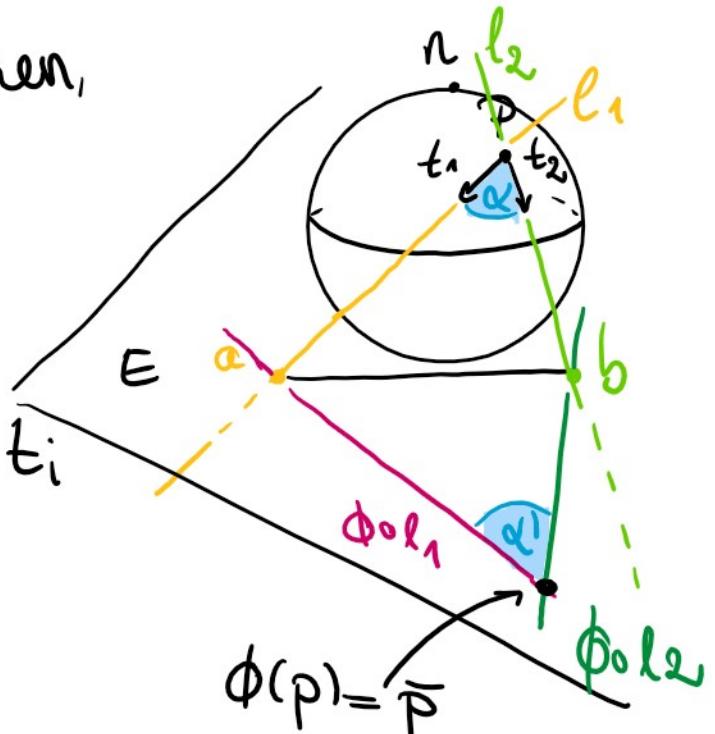
Der Schnitt $E' \cap E$ ist eine Gerade, die das Bild unter $\hat{\phi}$ von l ist.

□ Beh.

Um jetzt zu untersuchen, was $\hat{\phi}$ mit den Winkeln macht

betrachte Tangentialgeraden l_i an p in Richtung t_i für $i=1,2$.

Sei $a := l_1 \cap E$
und $b := l_2 \cap E$.



Somit sind $\alpha \neq \alpha'$ und $\alpha' := \alpha - \alpha'$ zwei Winkel über der gleichen Grundseite ab.

gewünscht w.

Wir zeigen:

1. P und \bar{P} haben selben Fußpunkt auf der Seite a,b
2. $\Delta(a,p,b)$ und $\Delta(a,\bar{p},b)$ haben selbe Höhe über a,b .

Damit gilt dann:

$$\Delta(p,b,x) \underset{\text{SWS}}{\sim} \Delta(\bar{p},b,x)$$

$$\Delta(a,p,x) \underset{\text{SWS}}{\sim} \Delta(a,\bar{p},x)$$

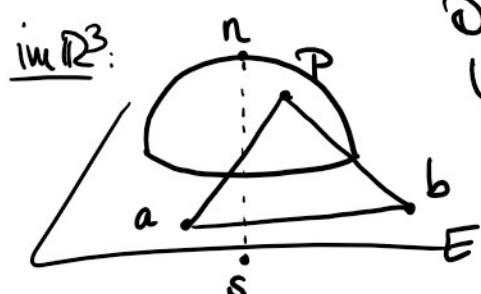
und somit auch

$\Delta(a,p,b)$ kongruent zu $\Delta(a,\bar{p},b)$.

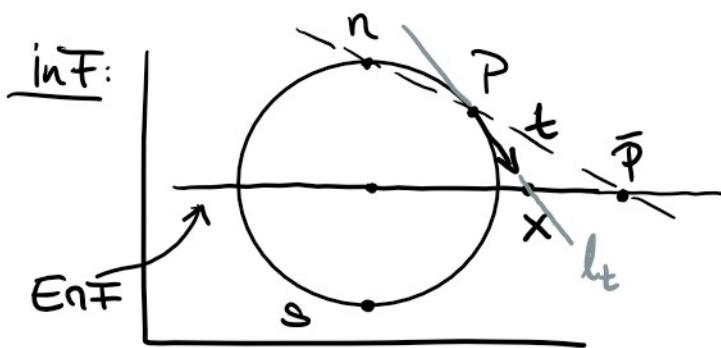
Insbesondere ist dann $\alpha = \alpha'$.

Bleibt also noch Ber 1 und 2 zu zeigen.

Bew. Ber 1: Den Fußpunkt x von p im Dreieck $\Delta(a,p,b)$ erhält man wie folgt:



Betrachte Ebene F im \mathbb{R}^3 durch Punkte n, s, P .



Betrachte in der Ebene F die Tangente l_t an den Kreis $F \cap S$ in p . Sei t die Tangentialrichtung in p . (in Richtung E).

(in Richtung t).

Sei $x = l_t \cap E$. Die Richtung t ist Startrichtung der kürzesten Kurve von p zum Äquator von S .

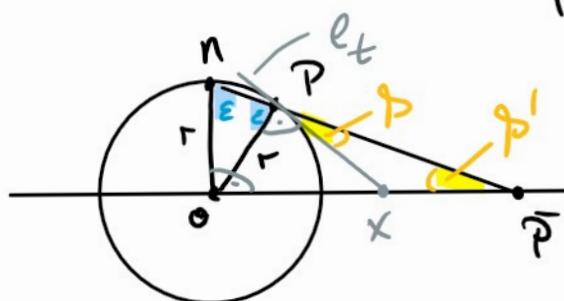
Also muss x Fußpunkt von p über der Seite a, b sein.

Weil $\hat{\phi}$ die Tangentialgerade l_t auf eine Gerade in E abbildet ist x auch Fußpunkt von \bar{p} über a, b .

□ Bsch 1

Bew Bsch 2: es ist z.z.:

$$d(x, p) = d(x, \bar{p}).$$



Es gilt wegen
 $d(O, p) = d(O, n)$,
dass
 $\angle Onp = \angle npO =: \varepsilon$

Weiter ist $\beta = \beta' = 180^\circ - 90^\circ - \varepsilon$ ←
und daher $d(x, p) = d(x, \bar{p})$.

□ Bsch 2

Damit ist der Satz bewiesen. □

* für β' gilt das wegen
Dreiecks- ε -Summe in $\triangle(0, \bar{p}, n)$
und für β wegen Gerade
durch p und n an \bar{p} .