Kapitel 08 Inzidenzgeometrie

Mittwoch, 12. Juni 2019 13:31

Viele Sätze der Geometrie sind unabhängig von den genauen Maßen (d.h. Längen) beteiligter Strecken oder Winkel.

z.B.: Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt

oder je zwei Geraden in der eukl. Ebene schneiden sich nicht oder in genau einem Punkt

⇝ betrachte Geometrie aus der Perspektive der Beschreibung von relativer Lage von „Punkten" und „Geraden".

Hierbei abstrahieren wir „Punkte" und „Geraden" zu abstrakten Objekten, die wir kontextfrei betrachten wollen.

Def 8.1

Eine <u>Relation</u> zwischen zwei Mengen A, B ist eine Teilmenge I der Produktmenge $A \times B$. Wir sagen a <u>ist inzident zu</u> b (oder a ist in Relation zu b) für $a \in A$, $b \in B$, wenn $(a,b) \in I$. Schreibe dann auch <u>$a I b$</u>.

Achtung: Eine Relation in diesem Sinne ist

Achtung: Eine Relation in diesem Sinne ist im Allgem. keine Äquivalenzrelation!

Bsp. $A = \{$ Paris, Rom, München, Marseille, Lyon, Venedig, Berlin, Magdeburg, Hamburg $\}$

$B = \{F, D, I\}$

$I = \{ (a,b) \mid a \in A, b \in B$ und a ist Stadt in $b \}$

ist zB eine Relation.

Def 8.2

Eine <u>Inzidenzstruktur</u> ist ein Tripel (P, G, I) von zwei Mengen P, genannt Punkte, und G, genannt Geraden, und einer Relation I zwischen P und G, d.h. einer Teilmenge $I \subset P \times G$.

Wir schreiben für $(p,g) \in I$ auch pIg und sagen <u>p inzidiert mit g</u> oder <u>g ist mit p inzident</u>.

Wir sagen (P, G, I) ist eine <u>endliche</u> Inzidenzstruktur, wenn P und G endlich sind.

Notation 8.3 Sei (P,G,I) Inzidenzstruktur.
Für $p \in P$ schreibe (p) für die Anzahl der $g \in G$, die mit p inzidieren.
Ebenso $(g) = |\{p \in P \mid pIg\}|$, $g \in G$.

Satz 8.3
(P,G,I) endliche Inzidenzstruktur mit $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, $G = \{g_1, \dots, g_m\}$.
Dann gilt:
$$(p_1) + (p_2) + \dots + (p_n) = |I| = (g_1) + \dots + (g_m).$$

Beweis:
Die Elemente in I lassen sich auf zwei Weisen zählen:
Die Anzahl der Paare $(p,g) \in I \subset P \times G$ ist die Summe von (p_i) Inzidenzen für p_i bzw. (g_i) Inzidenzen für g_i. $\square$

Dieses zwar recht elementare Satz ist dennoch nützlich Strukturen zu untersuchen.

Viele tiefe Aussagen über Inzidenzstrukturen im Allgemeinen können wir nicht erwarten, da diese zu allgemein sind um viel Struktur zu besitzen.

Bsp. 8.4 (Bsp. zu Satz 8.3)

Binomialkoeffeffizienten sind für $n, k \in \mathbb{N}_0$ definiert durch $\binom{n}{k} :=$ # k-elementigen Teilmengen einer n-elem. Menge

Definiere (P, G, I) durch

P eine n-elementige Menge

$G = \{$ k-elem. Teilmengen von P $\}$

für $p \in P$ und $g \in G$ ist $p I g$ wenn $p \in g$ gilt.

Element in P Teilmenge von P

Dann ist $(p) = \binom{n-1}{k-1}$, weil das die Anzahl der k-elem. Teilmengen von P ist, die p enthalten.

Weiter ist nach Definition $(g) = k \; \forall g \in G$.

Mit Satz 8.3 und $|G| = \binom{n}{k}$ ist dann

$$n \cdot \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} \cdot k \quad \text{und somit}$$

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} = \dots = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

$\square$

Bsp. 8.5

Graphen codieren Inzidenzstrukturen mit

Graphen codieren Inzidenzstrukturen mit $(g) = 2 \quad \forall g \in G$.

Das geschieht wie folgt:

$P = \{$Ecken im Graphen$\}$

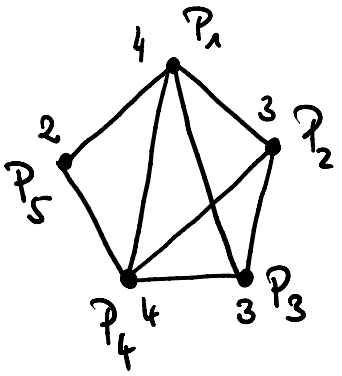
$G = \{$Kanten im Graphen$\}$ *verbindende Linie zw. zwei Punkten in P

$I = \{$Paare von Ecken p auf Kante $g\}$

$(p) = \boxed{\#\text{ausgehende Kanten}}$ (Zahl an Ecke im Bsp Bild unten)

$(g) = 2 \quad \forall g \in G$

diesen Wert nennt man Ordnung der Ecke



Beh. in einem endlichen Graphen ist die Anzahl der Ecken mit ungerader Ordnung immer gerade.

Beweis: Laut Satz 8.3 ist

$$\sum_{p \in P} (p) = \sum_{g \in G} (g) = 2 \cdot |G|$$

Also kann es nicht ungerade viele $p \in P$ mit (p) ungerade geben. $\square$

Def 8.6

Eine Inzidenzstruktur (P, G, I) ist eine Inzidenzgeometrie, wenn gilt:

a) Auf jeder Geraden liegen mindestens 2 Punkte

Inzidenzgeometrie, wenn gilt:

a) auf jeder Geraden liegen mindestens 2 Punkte
b) durch je zwei Punkte geht genau eine Gerade
c) es gibt 3 Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen.

Bsp. 8.7

1) Die euklidische Ebene liefert eine Inzidenzgeometrie mittels:

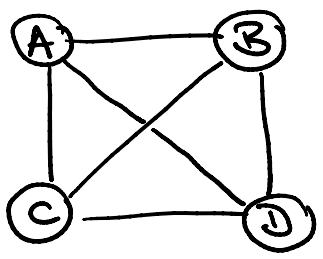
$P = \{\text{Punkte in } \mathbb{R}^2\}$
$G = \{\text{Geraden in } \mathbb{R}^2\}$
$I = \{(p,g) \in P \times G \mid p \in g\}$.

2) Untervektorräume im $V = \mathbb{R}^3$ liefern eine Inzidenzgeometrie:

$P = \{\text{1-dim UVR in } V\}$
$G = \{\text{2-dim UVR in } V\}$
$I = \{(p,g) \mid p \subset g\}$.

<u>Bem.</u> Das geht auch allgemeiner für $V = \mathbb{K}^n$ mit $\mathbb{K}$ ein Körper und höherdimensionalen UVR in V für Elemente in P bzw G.

3) folgendes Graph codiert eine Inzidenzgeometrie:



dabei ist

$P = \{A, B, C, D\}$ und

$G = \{\{A,B\}, \{A,C\}, \{A,D\},$
$\{B,C\}, \{B,D\}, \{C,D\}\}$

$G = \{\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},$
$\{B,C\},\{B,D\},\{C,D\}\}$

I definiert über „$\in$"

d.h. z.B. $A\, I\, \{A,B\}$

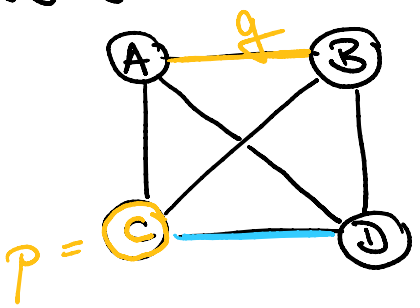
$g \in G$ entsprechen Kanten im Graph

Dieses Bsp. erfüllt zusätzlich die Bedingung:

d) Zu jeder Geraden $g \in G$ und $p \in P$ mit p nicht inzident zu g existiert genau eine Gerade h mit $p \in h$ und $g \cap h = \emptyset$.

betrachte zur Illustration folgendes Bild:

geg. $g = \{A,B\}$ und $p = C$ so ist $h = \{C,D\}$



einzige Gerade mit $g \cap h = \emptyset$ und $p \in h$.

8.8 Bem: Die im Bsp. 8.7 1) konstruierte Inzidenzgeometrie aus eukl. Ebene hat auch Eigenschaft d).

Inzidenzgeometrien, die alle Eigenschaften a) – d) haben nennt man <u>affine Ebenen</u>. Sie haben eine reichhaltige Struktur.

Wir betrachten noch ein (wichtiges!) Bsp.:

8.9 Die Fano-Ebene:

8.9 Die Fano-Ebene:

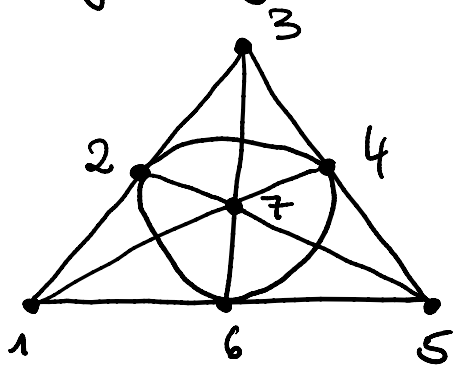
Es sei folgende Inzidenzstruktur (P, G, I) gegeben:

$P = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$

$G = \{\{1,2,3\}, \{1,4,7\}, \{1,5,6\}, \{2,4,6\}, \{2,5,7\}, \{3,6,7\}, \{3,4,5\}\}$

I sei geg. durch „$\in$"

folgender Graph codiert diese Inzidenzstruktur:



• $\hat{=}$ Elementen in P

bzw. $\hat{=}$ Elementen in G

<u>Beh.</u> Die Fano-Ebene erfüllt a) – c) und ist also eine Inzidenzgeometrie. d) ist nicht erfüllt.

<u>Bew</u> a) – c) überprüft man leicht

zu d): $p = 3$ und $g = \{2, 4, 6\}$ erfüllt d) nicht, weil alle Geraden, die p enthalten auch g schneiden.

$\square$

Die Fano-Ebene lässt sich analog zum Bsp. 8.7.2) konstruieren, wenn man $\mathbb{R}$ durch den Körper $\mathbb{F}_2$ mit genau 2 Elementen ersetzt.

Als Menge ist $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$

neutr. multipl. Elt.

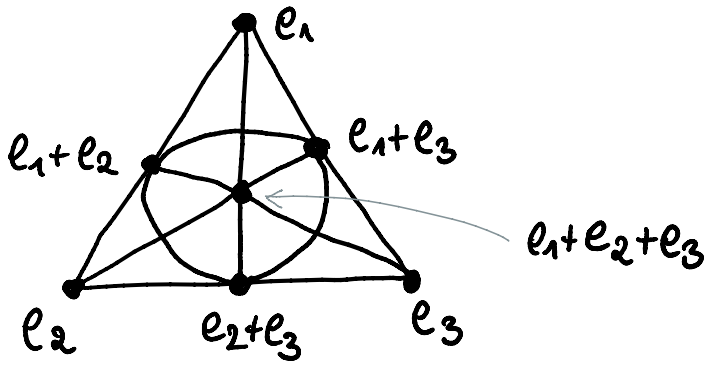
neutrales additives Elt.

neutrales additives Elt.

In $V = \mathbb{F}_2^3$ gibt es genau 7 Geraden (genau 7 Vektoren, die paarw. l.u. sind) und 7 Ebenen (deren Basis aus je zwei Vektoren besteht).

Die Geraden sind die 1-dim UVR in P und die Ebenen die 2-dim UVR in G.

Man erhält mit $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$



$P \hat{=} \{e_1, e_2, e_3, e_1+e_2, e_2+e_3, e_1+e_3, e_1+e_2+e_3\}$

$G \hat{=} \{ \langle a,b \rangle \mid a \neq b \text{ und } a,b \in P \}$

$\mathbb{F}_2$-lineares Aufspann

$\rightarrow$ mehr zu $\mathbb{F}_2$ und der Fano-Ebene in den Übungen.

8.10 Satz

Sei (P,G,I) eine affine Ebene (d.h. eine Inzidenzgeometrie für die zusätzlich d) gilt).
Seien P und G endlich.
Wenn ein $g \in G$ existiert mit $(g) = n$, dann ist $(h) = n$ $\forall h \in G$

Wenn ein $g \in G$ existiert mit $(g) = n$,
dann ist $(h) = n \ \forall h \in G$.
Weiter gilt dann:

- $(p) = n+1 \quad \forall p \in P$
- $|P| = n^2$
- $|G| = n \cdot (n+1)$

ohne Beweis

Man nennt n die <u>Ordnung</u> der affinen Ebene.

Es existieren aber nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ affine Ebenen der Ordnung n.
ZB konnte 1991 mit Einsatz von Computern erst gezeigt werden, dass es keine affine Ebene der Ordnung $n = 6$ und keine für $n = 10$ gibt.

Bsp. 8.7.3) ist affine Ebene der Ordnung $2 = n$.