zu Kap. 8: Planare Graphen

Petra Schwer

OVGU, SS 2019

Quelle: Scheid-Schwarz "Elemente der Geometrie", Springer Spektrum, Kapitel 8.4

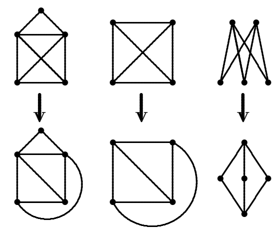
planare Graphen

Im Folgenden ist ein Graph ein Paar (V, E) von Ecken V und Kanten E, wobei $E \subset V \times V$ sei. Wir nehmen an, dass der Graph keine Schleifen besitzt, d.h. keine Kante von der Form $\{v, v\}$ ist für ein $v \in V$.

Definition (8.11)

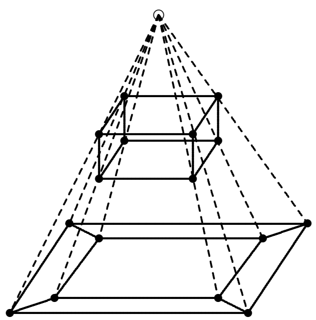
Ein *planarer Graph* ist ein Graph, den man überschneidungsfrei in der Ebene zeichnen kann.

Beispiele planarer Graphen:



Netze konvexer Polyeder

Die Kanten eines konvexen Polyeders im 3-dimensionalen Raum bilden einen Graph. Diese Polyedernetze sind planare Graphen.



Polyedernetz eines Würfels als planarer Graph.

Flächen eines planaren Graphen

Definition (8.12)

Ein planarer Graph teilt (überschneidungsfrei gezeichnet) die Ebene in Gebiete ein, die man die *Flächen* des planaren Graphen nennt. Eine der Flächen bei einem überschneidungsfrei gezeichneten Graphen ist stets unbeschränkt. Sie wird die *äußere Fläche* genannt.

Theorem (8.13 Eulerscher Polyedersatz)

Sei e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Flächen eines planaren Graphen. Dann gilt:

$$e - k + f = 2.$$

Beweis Eulerscher Polyedersatz

Wir beginnen mit einer Ecke. Es gilt: $e = 1; k = 0; f = 1$. Also ist $e - k + f = 2$.

Wir bauen den Graph schrittweise durch Hinzufügen von Kanten auf. Hinzufügen einer Kante inklusive ihrer zweiten Ecke liefert $e = 3, k = 1, f = 1$ also wieder $e - k + f = 2$.

Beim Zufügen von Kanten im (teilweise schon aufgebauten Graphen) gibt es zwei Fälle:
(1) Die neue Kante verbindet zwei vorhandene Ecken. Dann bleibt e gleich und k, f wachsen um jeweils 1.

(2) Die neue Kante hat eine neue zweite Ecke. Dann ändert sich f nicht aber e und k wachsen um jeweils 1.

Insgesamt bleibt $e - k + f = 2$ und der Satz gilt.

□

Kriterium für nicht-Planarität

Theorem (8.14)

In einem planaren Graph, dessen Flächen alle von genau n Kanten begrenzt werden, gilt

$$n(e-2) = k(n-2) \text{ und } k \leq 3(e-2).$$

Ist der Graph maximal, d.h. kann man keine weitere Kante ohne Verletzung der Planarität hinzufügen, dann gilt $k = 3(e-2)$.

Beweis 8.14

Da jede Fläche mit n Kanten inzidiert und es f Flächen gibt, liegen nf Inzidenzen Kante/Fläche vor. Diese Inzidenzen kann

man aber auch anders zählen:
Es gibt k Kanten, und jede dieser Kanten inzidiert mit 2 Flächen. So erhält man $2k$ Inzidenzen Kante/Fläche.

Daraus ergibt sich $nf = 2k$, mit Satz 8.13 gilt dann

$$n(k+2-e) = 2k \text{ bzw. } n(e-2) = k(n-2).$$

Ist der Graph maximal, so ist $n = 3$. Im Allgemeinen ist $n \geq 3$ und deshalb

$$\frac{n}{n-2} = 1 + \frac{2}{n-2} < 3.$$

Daraus folgt die Behauptung.

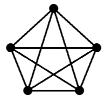
□

nicht-planare Graphen

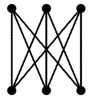
Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar.

Für K_5 ist $k = 10, n = 3$ aber

$$3(e-2) = 9 \neq 10(n-2).$$



K_5



$K_{3,3}$

Für $K_{5,5}$ ist $k = 9$ und $n = 4$ und somit

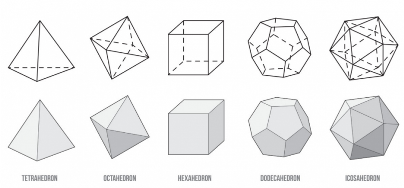
$$16 = n(e-2) \neq 18 = k(n-2).$$

Bemerkung:
Man kann zeigen, dass ein Graph genau dann nicht planar ist, wenn er keinen Teilgraph enthält, der (Unterteilung) von K_5 oder $K_{3,3}$ ist.

Platonische Körper

Definition (8.15)

Ein *Platonischer Körper* ist ein konvexes Polyeder, dessen Seitenflächen zueinander kongruente regelmäßige $n-Ecke$ sind, von denen in jeder Ecke gleich viele (m-Stück) aneinandertreffen.



Theorem (8.16)

Es gibt genau fünf platonische Körper:
Tetraeder, Hexaeder, Oktoaeder, Dodekaeder und Ikosaeder.

Beweis 8.16

Wir zeigen jetzt zunächst, dass es höchstens fünf Platonische Körper gibt. Dafür schätzen wir $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$ nach unten ab.
In jeder Ecke eines Platonischen Körpers treffen sich m kongruente n-Ecke.

Man erhält dann

- Anzahl Inzidenzen Ecke/Kante $= em = 2k$.
- Anzahl Inzidenzen Kante/Fläche $= fn = 2k$.
- Anzahl Inzidenzen Fläche/Ecke $= fn = em$.

Es genügt zwei dieser drei Gleichungen zu betrachten (die dritte folgt aus zweien). Betrachte also

$$em = 2k = fn.$$

Die Eulersche Polyederformel $e + f = 2 + k$ liefert dann

$$\frac{2k}{m}+\frac{2k}{n} = 2 + k \text{ bzw. } \frac{1}{m}+\frac{1}{n} = \frac{1}{k}+\frac{1}{2} > \frac{1}{2}.$$

Fortsetzung Beweis 8.16

Es gilt $\frac{1}{m}+\frac{1}{n} > \frac{1}{2}$. Wegen $n \geq 3$ muss dann $3 \leq m \leq 5$ gelten. Hierbei war m die Anzahl der sich an einer Ecke treffenden Flächen.

Berechnungen für die erlaubten Werte von m:

Für $m = 3$ ist $\frac{1}{n} = \frac{1}{k} + \frac{1}{6}$, also $n \leq 5$.
$n = 3$ ergibt $k = 6,\ e = 3,\ f = 4$,
$n = 4$ ergibt $k = 12,\ e = 8,\ f = 6$,
$n = 5$ ergibt $k = 30,\ e = 20,\ f = 12$.
Für $m = 4$ ist $\frac{1}{n} = \frac{1}{k} + \frac{1}{4}$, also $n = 3$ und damit $k = 12,\ e = 6,\ f = 8$.

Für $m = 5$ ist $\frac{1}{n} = \frac{1}{k} + \frac{3}{10}$, also $n = 3$ und damit $k = 30,\ e = 12,\ f = 20$.

	e	k	f
Tetraeder	4	6	4
Hexaeder	8	12	6
Oktaeder	6	12	8
Dodekaeder	20	30	12
Ikosaeder	12	30	20

Es gibt also höchstens 5 Platonische Körper.

Dass es mindestens 5 Platonische Körper gibt zeigt man durch genaue Konstruktion der Körper. Dafür kann man auch deren Dualität ausnutzen. □