

Wilfried HERGET, Halle (Saale)

Papierfalten im Mathematikunterricht – gefällt mir!

Papierfalten – vielleicht denken Sie da an Kindergarten, Kindergeburtstag ... oder an kunstvolle japanische Origami-Dekoration. In der Grundschule mag das ja noch sinnvoll sein. Aber Papierfalten im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I? Oder gar in der Sekundarstufe II?

Falten und Forschen, Finden und Formulieren ...

Papierfalten – das setzt unmittelbar auf die Symmetrie, eine der zentralen Ideen der Geometrie, und öffnet auf ganz eigene Weise den Unterricht. Tatsächlich lassen sich über das Falten von Papier praktisch alle üblichen Begriffe der Mittelstufen-Geometrie erreichen, insbesondere Lot, Höhe, Parallele, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Seitenhalbierende, Teilverhältnisse, besondere Winkel, Flächeninhalt (Herget 2013). Das Falten kann die klassischen Hilfsmittel – Zirkel und Lineal, Tafel und Kreide – auf eine (an-)fassbare Weise ausgezeichnet ergänzen (vgl. auch die Idee in Besuden 2010), und die gewohnten Beweise lassen sich durchweg in den Argumentationen anhand des Falt-Prozesses wiederfinden.

Eine besondere Stärke ist, dass die Schülerinnen und Schüler hier wirklich etwas mit ihren Händen, mit ihren Fingern erschaffen. Auf diese Weise können sie experimentell-handelnd zunächst – für sie überraschende – geometrische Muster und Regelmäßigkeiten erkennen. In einem zweiten Schritt gilt es, diese Entdeckungen zu formulieren und zu überprüfen und gegebenenfalls zu verallgemeinern. Im letzten Schritt schließlich kann das Entdeckte dann tatsächlich mathematisch begründet werden. Insgesamt eine schöne Gelegenheit, Mathematik nachhaltig begreifbar zu erleben!

... im Unterricht, auch für Klasse 5 bis 13

Sehr viele der für den Mathematikunterricht interessanten Faltungen lassen sich mit einem A4-Blatt realisieren – das ist ausgesprochen ökonomisch. Farbiges Papier ist natürlich ansprechender, doch sogar Fehlkopien lassen sich hier gut nutzen. Sind einmal *quadratische Papierstücke* nötig, dann bieten sich Zettelboxen an. *Kreisrunde Papierstücke* finden sich in dem (sonst oft wenig genutzten) Moderationskoffer.

Die Schülerinnen und Schüler falten die Figuren am besten auf dem Tisch. Schritt für Schritt lernen sie dabei, konzentriert und exakt zu falten. Die Faltungen führe ich ggf. mit einem großen Papierstück an der Tafel vor.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 527–530).
Münster: WTM-Verlag

Ein Beispiel, auch für „Große“: Die Dreiecks-Überraschung im Kreis

Hier eine schöne Aufgabe, die immer wieder auch die „Großen“ fasziniert und an der das Falten, Forschen, Finden und Formulieren deutlich werden kann (Schmitt-Hartmann & Herget 2013, S. 140 f.). Ausgangspunkt ist eine farbige Papierscheibe aus dem Moderationskoffer.

Bestimmen Sie durch zweimaliges Falten den Mittelpunkt M des kreisförmigen Papierstücks.

Falten Sie einen Punkt des Papierrandes auf M . Bezeichnen Sie die beiden Endpunkte der Faltlinie mit P_1 und P_2 .

Falten Sie einen weiteren Punkt des Papierrandes so auf M , dass die entstehende Faltlinie durch den Punkt P_1 verläuft. Bezeichnen Sie den anderen Endpunkt der Faltlinie mit P_3 .

Falten Sie schließlich das Papierstück so, dass die Faltlinie durch die Punkte P_2 und P_3 verläuft. Die eingefaltete Papierlasche berührt den Mittelpunkt des Kreises.

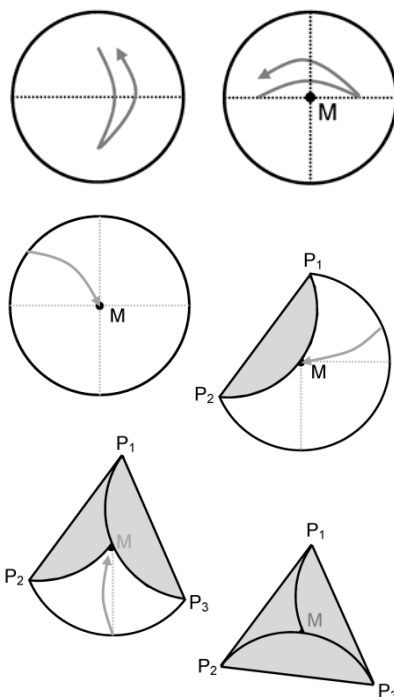
Welches besondere Dreieck entsteht? Warum?

Begründen Sie auch, warum die eingefalteten Laschen bei den weiteren Schritten weder von einer Faltlinie geknickt werden noch über den Rand des Ergebnis-Dreiecks hinausragen.

... einfach und überraschend leistungsfähig!

Falten ist an sich einfach, elementar. Doch es fordert und fördert Sorgfalt, Aufmerksamkeit, Konzentration, beim Vormachen wie beim Nachmachen. Die Faltprodukte lassen sich sehr gut ins Schulheft einkleben (sie sind ja kleiner als das Ausgangsformat A4) – und sie lassen sich bei Bedarf auch wieder auseinanderklappen: Eine „geronnene Bewegung & Verformung“, die jederzeit „wieder verflüssigt werden kann“ (Bender 2001, in anderem Zusammenhang), sozusagen *dynamische Geometrie*, ganz ohne Software.

Auch die Forschungsergebnisse werden an der Tafel und im Heft notiert, schließlich auch die Begründungen – als Ergebnis des abschließenden Klasesgesprächs, wesentlich von der Lehrkraft getragen: „Warum klappt das so? Stimmt das wirklich ganz genau? Immer?“ Dabei zeigt sich, dass Falten durchaus auch anspruchsvoll ist – wenn man nicht beim Falten stehen bleibt: Beweise zum Anfassen – und zum Mitdenken/Nachdenken.



Ein erprobter Einstieg – senkrecht, parallel, Dreiecksgeometrie ...

In (Herget 2013) wird ein Unterrichtsgang ab etwa Jahrgangsstufe 6 und 7 vorgestellt. Dort werden, ausgehend von ersten Faltnlinien, zunächst die elementar-geometrischen Begriffe *senkrecht* und *parallel* erarbeitet und die Grundfaltungen *Punkt auf Punkt* und *Strecke auf Strecke* thematisiert (vgl. auch Wollring 2002, Schmitt-Hartmann & Herget 2013). Als bewusste Herausforderung erweist sich das erste kleine Forschungsprojekt: Wie kann es gelingen, ein DIN-A4-Blatt zu halbieren bzw. zu vierteln, und zwar auf *möglichst vielen* verschiedenen Wegen?

Schließlich stellt jede/jeder einige individuelle Dreiecke aus einem A4-Blatt her und erkundet daran die besonderen Eigenschaften der Höhen, Mittelsenkrechten, Winkelhalbierenden und Seitenhalbierenden. Faltungen zu besonderen Winkeln, zur Winkelsumme und zum Flächeninhalt vom Dreieck und vom Trapez können sich anschließen, schlagen so die Brücke hin zu Gleichungen und Termen. Ideen für Klasse 9 bieten dann etwa (Zeyher & Kleine 2011), bis Klasse 12/13 (Schmitt-Hartmann & Herget 2013) und (Etzold & Petzschler 2014).

Nimm eines deiner A4-Dreiecke. Trage – *auf der Rückseite!* – in den Punkten A, B und C die Winkel α , β und γ farbig ein.

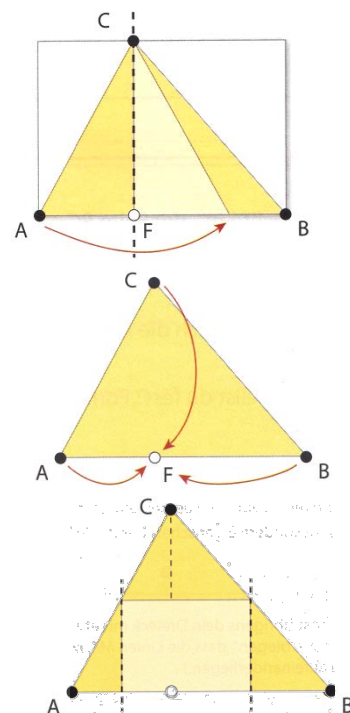
Falte die Höhe von C auf AB. Du erhältst auf der Seite AB den Punkt F.

Falte nun A auf F, falte auch B auf F und schließlich auch C auf F.

Was fällt dir an den Winkeln in F auf? Was bedeutet das für die Winkelsumme im Dreieck?

Aus dem Dreieck ist jetzt ein Rechteck entstanden. Bestimme den Flächeninhalt des Rechtecks – du kannst dabei g für die Länge von AB setzen und h für die Länge von CF.

Was bedeutet das für den Dreiecks-Flächeninhalt?



Kein Grund, geknickt zu sein – Falten find‘ ich gut!

Tatsächlich bietet das Falten zahlreiche attraktive Ergänzungen für den Mathematikunterricht, auch jenseits der Grundschule, sogar bis in die Sekundarstufe II. Über das Falten können Schülerinnen und Schüler auf ganz eigene Weise mathematische Zusammenhänge entdecken und vertiefen – und erleben dabei die Mathematik *Handlungsorientiert* und wirklich *begreifbar*. Heinz Klaus Strick sagte einmal: „Die Schülerinnen und Schüler entdecken

tatsächlich Falten im Gehirn, mit denen sie vorher nicht gerechnet hatten.“ Ein Blick in die Literatur, gerade aus den letzten Jahren, aber auch in einige Schulbuchwerke zeigt, dass und wie dies zunehmend wertgeschätzt wird. Ein Beitrag zum Entfalten des Mathematikunterrichts – Gefällt mir!

Literatur

- Bender, P. (2001). Schul-Geometrie und Computer-Geometrie. In: Elschenbroich, H.-J. et al. (Hrsg.): *Zeichnung – Figur – Zugfigur* (S. 31–40). Hildesheim: Franzbecker.
- Besuden, H. (2010). Zur Dynamisierung geometrischer Figuren. In: Herget, W. & Richter, K. (Hrsg.): *Mathematische Kompetenzen entwickeln und erfassen* (S. 37–47). Hildesheim/Berlin: Franzbecker.
- Etzold, H. & Petzschler, I. (2014). *Mathe verstehen durch Papierfalten. Anleitungen und Arbeitsblätter für die Sekundarstufe*. Mülheim: Verlag an der Ruhr.
- Flachsmeyer, J. (2009). Mathematikdidaktische Belege des Origami. *Mathematische Semesterberichte*, 56/2, 201–214.
- Henn, H.-W. (2009). Gefaltete Mathematik: Origami – Die Kunst des Papierfaltens. *Der Mathematikunterricht*, 55/2, 40–50.
- Herget, W. (2013). Falten und Forschen, Finden und Formulieren. *MatheWelt. mathematik lehren*, 176, 24–40.
- Herget, W. & Strick, H. K. (2012). *Die etwas andere Aufgabe 2. Mathe mit Pfiff*. Seelze: Friedrich Verlag.
- Jäger, J.; Kroll, W. & Schupp, H. (2014). Blattfaltungen. Erscheint in: *Mathematische Semesterberichte*.
- Petzschler, I. (2011a). Vom Dreieck zum Stern. *mathematik lehren*, 168, 67.
- Petzschler, I. (2011b). Entdeckungen beim Papierfalten. In: Krohn, T. et al. (Hrsg.), *Mathematik für alle. Wege zum Öffnen von Mathematik* (S. 269–274). Hildesheim: Franzbecker.
- Pietsch, M. (2007). Papier falten und Geometrie begreifen. *mathematik lehren*, 144, 13–17.
- Schmitt-Hartmann, R. & Herget, W. (2013). Papierfalten im Mathematikunterricht. *Moderner Mathematikunterricht. Arbeitsblätter für die Klassen 5 bis 12*. Stuttgart: Klett.
- Schmitz, M. (2012). Papierfalten auch im Mathematikunterricht. Begründungen und Beispiele. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*.
- Steibl, H. (1997). *Geometrie aus dem Zettelkasten*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.
- Wollring, B. (2002). Ein Parcours zum Origami. *Mathe-Welt. mathematik lehren*, 113, 22–46.
- Wollring, B. (2014). Rezension zu (Schmitt-Hartmann & Herget). *Mitteilungen des Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 96, 67–70.
- Zeyher, A. & Kleine, M. (2011). Faltmuster erkunden. *MatheWelt. mathematik lehren*, 166, 24–40.