Geschichte und Grundlagen der Mathematik

Vorlesung von
H.-Ch. Grunau,
Mi, den 24.11.21

Der Einfluss David Hilberts auf die moderne Mathematik (= forschende Mathematik)

Was verbindet die folgenden Kolleg*innen unserer Fakultät mathematisch?

Klaus Deckelnick — Numerische Analysis

Hans-Christoph Grunau — Partielle Differentialgleichungen

Claudia Kirch — Statistik

Thomas Richter — Numerische Verfahren für partielle Differentialgleichungen

Sebastian Sager — Optimalsteuerung, Modellierung & Optimierung, u.a. in der Medizin

Petra Schwer — Geometrie, Gruppentheorie

So verschiedene Arbeitsgebiete ???!

§1 Mathematische Genealogie

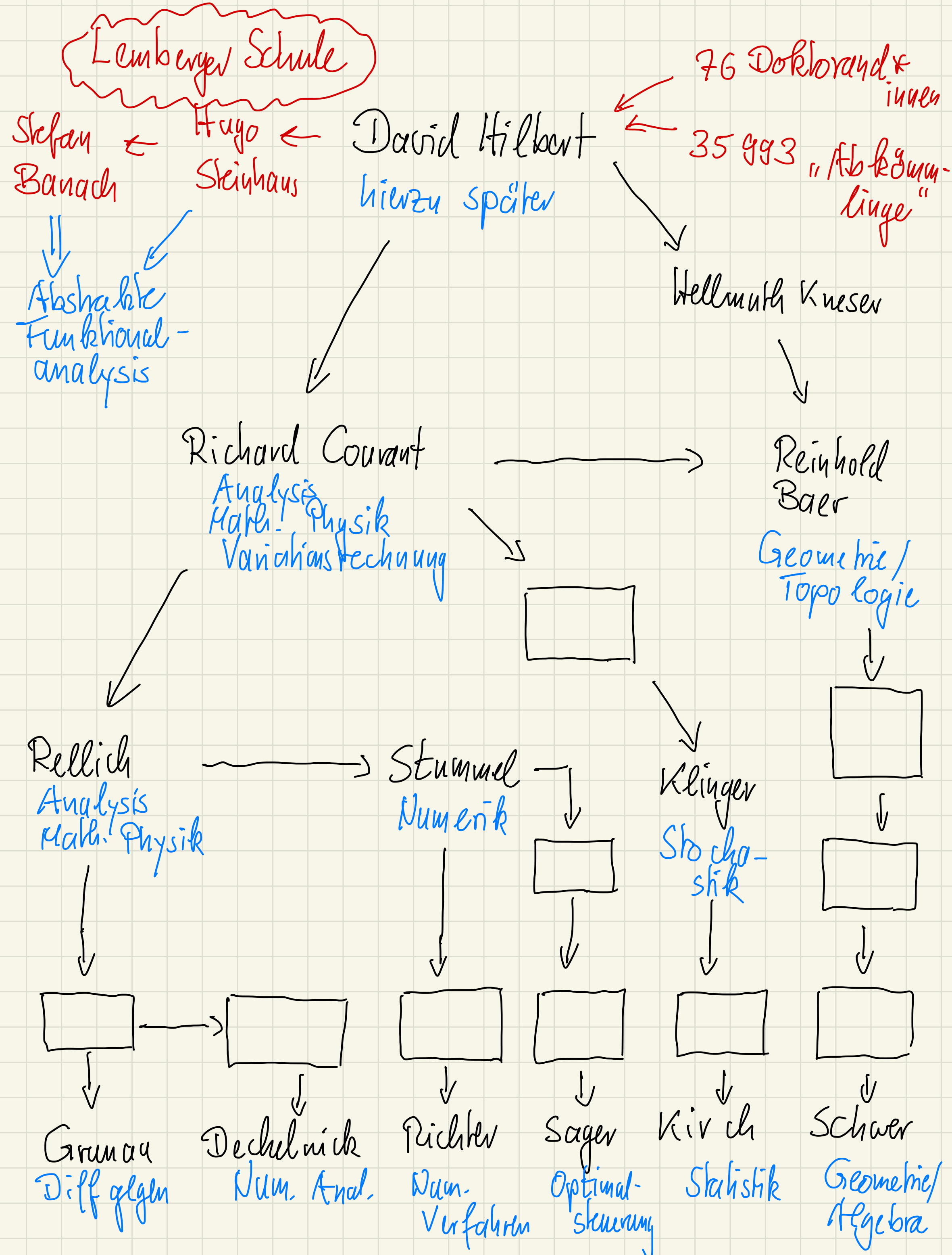
Viele Mathematiker*innen werden wissenschaftlich geprägt durch ihre Promotion und ihre Doktorväter / -mütter.

Daher interessant: Mathematische „Ahnengalerie"

Dazu: Mathematics Genealogy Project.

Schauen Sie sich dort gerne selbst um!

Bei den genannten 6 Kolleg*innen gelangt man nach 4 - 6 Generationen ($\sim$ 100 Jahre) bei ...


Lemberger Schule
Stefan Banach
Hugo Steinhaus
David Hilbert
hierzu später
76 Doktorand*innen
35 993 „Abkömmlinge"
Abstrakte Funktional-analysis
Hellmuth Kneser
Richard Courant
Analysis
Math. Physik
Variationsrechnung
Reinhold Baer
Geometrie/Topologie
Rellich
Analysis
Math. Physik
Stummel
Numerik
Klinger
Stochastik
Grunau
Diff glgen
Deckelnick
Num. Anal.
Richter
Num. Verfahren
Sager
Optimal-steuerung
Kirch
Statistik
Schwer
Geometrie/Algebra

Warum sehen Mathematiker*innen aus fast allen Teildisziplinen Hilbert als ihren Urahn

→ Arbeitsgebiete ansehen (später)

→ Erst einmal:

§2 David Hilbert – biographische Fakten

* 23.1.1862 Königsberg

† 14.2.1943 Göttingen

Eltern: Otto Hilbert – Jurist

Maria Theresia Hilbert geb. Erdtmann – entstammt Kaufmannsfamilie

beide preußisch-protestantisch, David später konfessionslos

Studium: 1880, Abschluss (damals die Regel) mit Promotion, 1885 Königsberg (je 1 Semester Heidelberg / Berlin)

Doktorvater: Ferdinand Lindemann (→ Transzendenz von π)

lebenslange Freundschaften + mathematischer Austausch

Adolf Hurwitz (3 J. älter, junger Extraordinarius in Kbg.)

H. Minkowski (2 J. jünger, gleichzeitig Kommilitone)

1885/86 „Wanderjahr" („PostDoc"):

Leipzig (Felix Klein, lebenslange Verbundenheit)
Paris (Henri Poincaré)

1886 Habilitation in Königsberg -> Privatdozent

1892 Extraordinarius " damals 2-3 Profs.
1893 Ordinarius " pro Fakultät!

1895 Ordinarius in Göttingen,
war/wurde mit Berlin zum Weltzentrum der Mathematik (bis 1933)
Hilbert lehnte Rufe ab, u.a. aus Leipzig, Heidelberg, Berlin

1930 Emeritierung

§ 3 Hilbert als Mensch und Wissenschaftler

(a) Familie

D. H. ⚭ Käthe Jerosch (* 31. 3. 1864, † 17. 1. 1945)
12. 10. 1892

Die Hilbert- und Jerosch-Familien „alte Freunde"

Im Prinzip war K. Jerosch / Hilbert eine sehr eigenständige Persönlichkeit, aber im Kaiserreich...

Sie hat aber alle Manuskripte D.H.s zum Druck in Reinschrift übertragen.
Hurwitz und vor allem Minkowski mussten Hilbert ermahnen, diese Unterstützung auch gebührend anzuerkennen / zu würdigen.

* 11.08.1893 einziger Sohn Franz

kein Erfolg in Schule und Beruf,
sogar psychisch krank

Vater distanziert sich $\xleftrightarrow{\text{Spannungen}}$ Mutter holt Franz nach Hause, unterstützend

(b) <u>Hochschullehrer</u>

Grundsätzlich sehr unterstützend und zugewandt, dazu Hilberts erster (→ 1898 Göttingen) Doktorand Otto Blumenthal:

„Ich erinnere mich noch genau des ungewohnten Eindrucks, den mir – zweitem Semester – dieser mittelgroße, bewegliche, ganz unprofessoral aussehende, unscheinbar gekleidete Mann mit dem breiten rötlichen Bart machte, der so seltsam abstach gegen Heinrich Webers ehrwürdige, gebeugte Gestalt und Kleins gebietende Erscheinung mit dem strahlenden Blick. [...] Hilberts Vorlesungen waren schmucklos. Streng sachlich, mit einer Neigung zur Wiederholung wichtiger Sätze, auch wohl stockend trug er vor, aber der reiche Inhalt und die einfache Klarheit der Darstellung ließen die Form vergessen.

Er bemühte sich sichtlich, allen verständlich zu sein, er
las für die Studenten, nicht für sich. [...]
Um mit den Seminarleuten genau bekannt zu werden
führte er sie eine Zeitlang nach jedem Seminar in eine
Waldwirtschaft, wo Mathematik gesprochen wurde. [...]
Ein ausdauernder Fußgänger, machte er mit ihnen
allwöchentlich weite Spaziergänge in die Berge
Göttingens, da konnte jeder seine Fragen stellen, meist
aber sprach Hilbert selbst über seine Arbeiten, die ihn
gerade beschäftigten."
Zwischen 1898 und 1934 betreute Hilbert
76 Promotionen, davon 7 von Frauen (damals
ungewöhnlich viel).
Hilbert unterstützte auch Emmy Noether, erste
Privatdozentin in Göttingen, später weltberühmt. Dazu:
„Eine Fakultät ist doch keine Badeanstalt."

Wie im Privaten konnte Hilbert aber auch unangenehm bis abweisend sein:

„ Aber das ist doch ganz einfach!"

„ Sie haben eine sehr interessante Zusammenfassung einer wunderbaren Arbeit gegeben. Aber wenn ich mich frage, was Sie wirklich gesagt haben, ist es nichts als Kreide, Kreide, Kreide..."

Einmal sogar zu einem Gast in der „Mathematischen Gesellschaft" (= Mathematisches Kolloquium)

„Mein lieber Kollege, ich fürchte sehr, dass Sie nicht wissen, was eine Differentialgleichung ist."

Der Gast verlässt aufgebracht das Sitzungszimmer, Hilberts Kollegen bedrängen ihn, dass er das nicht hätte machen dürfen. Darauf Hilbert: „Aber er weiß nicht, was eine Differentialgleichung ist. Nun ist er ins Lesezimmer gegangen, um es nachzusehen."

(c) Machtergreifung der Nazis

Nach Jan. 1933:

Alle „nichtarischen" Mathematiker*innen mussten die Univ. Göttingen verlassen.

Laut Schappacher, Das Math. Inst. der Univ. Göttingen: 23 Personen, ca. die Hälfte.

Besonders prominent: Richard Courant, baute an der New York University das später nach ihm benannte „Courant Institute of Mathematical Sciences" auf. Heute ist dort ein Weltzentrum für Differentialgleichungen, Funktionalanalysis, Numerik, Anwendungen in den Naturwissenschaften, Differentialgeometrie, ...

Hilbert (71 Jahre) blieb, konnte zunächst auch nicht glauben, dass es in Preußen kein Recht mehr gebe.

Aber:

- Auf die Frage des Bildungsministers Rust 1934 (bis 1934 in Preußen, dann Reichsministerium):
  „Wie gedeiht die Mathematik in Göttingen, nachdem sie vom jüdischen Einfluss befreit wurde?"
  antwortete Hilbert:
  „Die Mathematik in Göttingen, die gibt es nicht mehr."
  Schon 1928 äußerte er sich beim Mathematikerkongress in Bologna:
  „Wer glaubt, Unterschiede ziehen zu können nach Leuten oder nach Rassen, der hat das Wesen unserer Wissenschaft vollkommen missverstanden, und die Gründe für ein solches Verhalten sind verabscheuungswürdig.

Die Mathematik kennt keine Rassen ... und für die ganze Mathematik ist die gesamte kulturelle Welt ein einziges Land."

(d) Arbeitsgebiete

Wiederholt hat Hilbert seine Forschungsgebiete vollkommen umgestellt.

Mit dem jeweils neuen Forschungsgebiet treten die vorherigen in den Hintergrund, manche gibt er ganz auf.

- Polynomtheorie / Algebraische Geometrie
  ab ca. 1886 (≈ Promotion)
- Algebraische Zahlentheorie
  ab ca. 1892, Hauptwerk: „Zahlbericht"
  ⇝ „Die Theorie der algebraischen Zahlkörper"
  Jahresbericht der DMV 1897, ca 370 Seiten, Kompendium der damals aktuellen Theorie

- Geometrie

  ab ca. 1898

  u.a. Präzisierung + Ergänzung des Axiomensystems der euklidischen Geometrie.

  Propagierung des axiomatischen Arbeitens

  → Erfolgsrezept für die moderne Mathematik

- Differential- und Integralgleichungen, Variationsrechnung (→ „Funktionalanalysis")

  ab ca. 1902, eindrucksvoll kondensiert im Courant-Hilbert.

- Allgemeine Relativitätstheorie / Mathematische Physik

  ab ca. 1915

- Logik, Grundlagen, „Gegen das Ignorabimus"

  (= Wir werden nicht wissen, vgl. du Bois-Reymond, 19. Jh., Medizin)

  ab ca. 1920

§4 Hilberts Einfluss auf die moderne Mathematik durch seine Schüler

Einflussreichste Doktoranden – bzgl. Zahl der Abkömmlinge

Erhard Schmidt (1905, 14097)

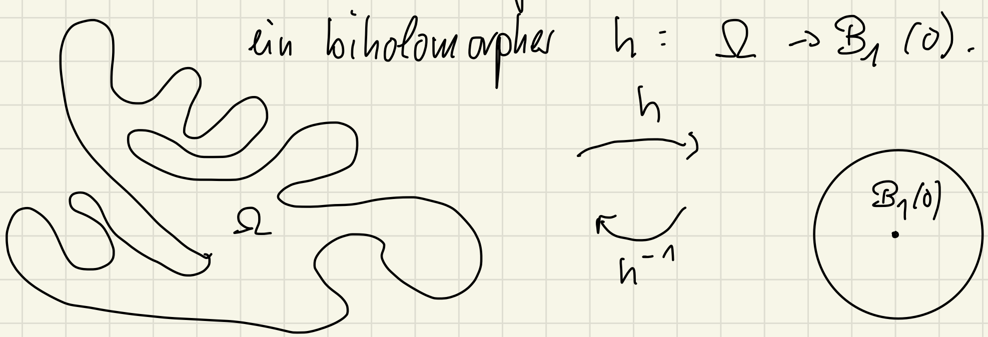
$\to$ algebraisch-topologische Linie

bekannt durch das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren

Richard Courant (1910, 7937)

$\to$ analytische Linie: Variationsrechnung, (geometrische) Analysis

(α) Richard Courant (1888–1972) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ glatt berandetes beschränktes Gebiet, einfach zusammenhängend (=ohne Loch). Dann existiert ein biholomorpher $h : \Omega \to B_1(0)$.



Beweis. Idee nach Riemann. O.B.d.A. $0 \in \Omega$.

Sei $r : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine Lösung von

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta r = 0 & \text{in } \Omega \\ r = |z| & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Big[\Delta r(\underset{\substack{\shortparallel \\ x+iy}}{z}) = r_{xx}(x,y) + r_{yy}(x,y)\Big].$$

Setze

$$w(z) := -\log|z| + r(z)$$

und das konjugiert harmonische

$$w^*(z) := \int_{z_0}^{z} \big(-w_y(\underset{\substack{\shortparallel \\ \xi+i\eta}}{\zeta})\,d\xi + w_x(\zeta)\,d\eta\big)$$

irgendein $z_0 \in \Omega$ irgendein Weg in Ω

$h(z) := \exp(-w(z) + i w^*(z))$, holomorph und wohldefiniert, da Ω einfach zshgd.

Schwachstelle: Ist (1) lösbar? Riemann hat das als gegeben hingenommen. Courant hat diese Lücke geschlossen. Motor: Hilbert. $\square$

(b) <u>Hugo Steinhaus</u> (1887 - 1972)

nach Studium in Lemberg (damals Lwow, Polen, heute Lwiw, Ukraine)

1911 Promotion bei Hilbert

1920 Professor in Lemberg,

Kristallisationspunkt der „Lemberger Schule"

1920 - 1939 einzigartige Blütezeit, praktisch die ganze abstrakte Funktionalanalysis wurde damals dort konden siert. Vielleicht bekanntester Vertreter: Stefan Banach, vgl. Banachscher Fixpunktsatz, Schauderscher Fixpunktsatz, Sätze von Hahn-Banach, Banach-Steinhaus, Banachräume...

Auch hier wieder Hilbert als Motor/Impulsgeber

§ 5 Hilberts Einfluss durch sein Jahrhundertprogramm (= Hilberts 23 Probleme)

23 wegweisende Probleme, vorgetragen auf dem internationalen Mathematiker Kongress 1900 (Hilbert war 38 Jahre alt)

- teilweise gelöst
- teilweise ungelöst
- teilweise unlösbar (damit hatte Hilbert nicht gerechnet !)

Exemplarisch <u>Problem 8a</u>

Bezeichnungen:

natürlicher Logarithmus $\log x := \log_e x := \ln x$,

d.h. $e^{\log x} = x$

Integrallogarithmus $Li(x) := \int_2^x \frac{1}{\log t}\, dt$

Primzahlfunktion

$$\pi(x) := \#\{p \in \mathbb{N} : p \text{ Primzahl}, p \leq x\}$$

Gauß (1777 – 1855) hat die Primzahlfunktion empirisch untersucht, z.B.:

x	$\pi(x)$	$x/\log x$	Rel. Fehler
$1 \cdot 10^8$	5.761.456	5.428.681,...	5,7 %
$2 \cdot 10^8$	11.078.938	10.463.628,...	5,6 %
$5 \cdot 10^8$	26.355.868	24.962.408,...	5,3 %
$1 \cdot 10^9$	50.847.535	48.254.942,...	5,1 %

Gauß vermutete

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \sim Li(x), \text{ d.h. } \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{Li(x)} = 1.$$

Beweis 1901 unabh. durch Hadamard und de la Vallée-Poussin über die Riemannsche (1826 – 1866) Zeta-Funktion:

$$\zeta(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{(z\log k)}}$$

Wegen $|e^{z\log k}| \underset{z=x+iy}{=} |e^{x\log k}| \cdot \underbrace{|e^{iy\log k}|}_{=1} = k^x$

absolute Konvergenz für $x = \mathrm{Re}\, z > 1$.

In $z=1$ hat $z \mapsto \zeta(z)$ eine Singularität.

Mittels Funktionalgleichung und analytischer Fortsetzung wird $\zeta : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ holomorph.

- Für $k \in \mathbb{N}$: $\zeta(-2k) = 0$
- Für $\mathrm{Re}\, z < 0$, $z \notin -2\mathbb{N}$: $\zeta(z) \neq 0$.
- de la Vallée-Poussin, Hadamard:

  $\forall z$ mit $z \neq 1$, $\mathrm{Re}\, z \geq 1$: $\zeta(z) \neq 0$

  $\Rightarrow$ Primzahlsatz.

Riemannsche Vermutung

Ist $z \notin \mathbb{R}$ und $\zeta(z) = 0$, so folgt $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$.

Genau dann gilt Riemannsche Vermutung, wenn

$$\forall x \geq 2: \quad |\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| < \frac{\sqrt{x}\log x}{8\pi}.$$

Die Riemannsche Vermutung ist bis heute offen.

Zur <u>Quellenarbeit</u>

In Vorträgen keine Zitierpflicht, wohl aber in schriftlichen Ausarbeitungen!

Diesem Vortrag liegen vor allem zugrunde

- Constanze Reid: Hilbert
- darauf aufbauende Wikipedia-Beiträge
- Eigene Recherche / Überlegungen
- Einige Originalartikel / Bücher u.a. von Courant, Forster, L. Schoenfeld
- Beiträge über die Lemberger Schule z.B. im Jahresbericht der DMV
- Mathematik im Nationalsozialismus: < Kütting, Schappacher

In einer schriftlichen Seminararbeit müsste das alles sorgfältig zitiert werden.

Hinweise zum Primzahlsatz

1) Eulersche Identität

$$\zeta(z) \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} = \prod_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_\ell^z}\right)}$$

$$p_1 = 2,\; p_2 = 3,\; p_3 = 5, \dots$$

Idee:

$$\prod_{\ell=1}^{L} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_\ell^z}\right)} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_L=0}^{\infty} p_1^{-j_1 z} \cdot \ldots \cdot p_L^{-j_L z}$$

$$= \sum_{j_1,\dots,j_L=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot p_L^{j_L}}\right)^z$$

Mit $L \to \infty$ folgt Behauptung.

2) $\log(\zeta(z)) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, k^{-z}$

mit $c_k = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{falls } k = p^m \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Folgt aus Euler und Logarithmusreihe

$$-\log(1-w) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w^j}{j} :$$

$$\log(\zeta(z)) = \sum_{l=1}^{\infty} -\log\left(1 - p_l^{-z}\right)$$

$$= \sum_{j,l=1}^{\infty} \frac{(p_l^j)^{-z}}{j} \quad \Rightarrow \text{Bch.}$$

3) $$\frac{d}{dz} k^{-z} = \frac{d}{dz} \exp(-z \log k)$$

$$= -(\log k) \, k^{-z}$$

$$\Rightarrow \; -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\frac{d}{dz} \log(\zeta(z))$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\log k) \, k^{-z} = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda(k) \, k^{-z}$$

mit $\Lambda(k) = \log p$ falls $k = p^m$, $\Lambda(k) = 0$ sonst.

4) Asymptotisches Verhalten von $\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$ für $z \to 1$ zeigt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{k \leq x} \Lambda(k) = 1$$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow$ Primzahlsatz