GESCHICHTEN AUS DER GESCHICHTE DER GEOMETRIE

Prof. Dr. Petra Schwer

GEOMETRIE

griechisch für Erdmessung

- neben der Arithmetik / Theorie der Zahlen eine der ersten mathematischen Bereiche
- Ursprung in Vermessungen, Betrachtung von Kompass und Linealkonstruktionen
- Euklid: begründet mathematische Präzision und axiomatische Methoden
- heute: hoher Abstraktionsgrad, viele Anwendungen

Spiele

Architektur

Kunst

Literatur

Musik

GEOMETRIE

Astronomie

Physik

Stochastik

Analysis

Optimierung

Algebra

1. GESCHICHTE

3 klassische Probleme:

- Quadratur des Kreises
  gesucht: Quadrat mit gleichem Flächeninhalt
- Würfelverdoppelung
  Volumen verdoppelt
- Winkeldreiteilung

mit Zirkel und unmarkiertem) Lineal

Quadratur des Kreises

Lindemann zeigt 1882, dass dies unmöglich ist

(Mathem. Annalen)

Ueber die Zahl π.*)

Von

F. Lindemann in Freiburg i. Br.

Bei der Vergeblichkeit der so ausserordentlich zahlreichen Versuche**), die Quadratur des Kreises mit Cirkel und Lineal auszuführen, hält man allgemein die Lösung der bezeichneten Aufgabe für unmöglich; es fehlte aber bisher ein Beweis dieser Unmöglichkeit; nur die Irrationalität von π und von π^2 ist festgestellt. Jede mit Cirkel und Lineal ausführbare Construction lässt sich mittelst algebraischer Einkleidung zurückführen auf die Lösung von linearen und quadratischen Gleichungen, also auch auf die Lösung einer Reihe von quadratischen Gleichungen, deren erste rationale Zahlen zu Coefficienten hat, während die Coefficienten jeder folgenden nur solche irrationale Zahlen enthalten, die durch Auflösung der vorhergehenden Gleichungen eingeführt sind. Die Schlussgleichung wird also durch wiederholtes Quadriren übergeführt werden können in eine Gleichung geraden Grades, deren Coefficienten rationale Zahlen sind. Man wird sonach die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises darthun, wenn man nachweist, dass *die Zahl π überhaupt nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung irgend welchen Grades mit rationalen Coefficienten sein kann.* Den dafür nöthigen Beweis zu erbringen, ist im Folgenden versucht worden.

Die wesentliche Grundlage der Untersuchung bilden die Relationen zwischen gewissen bestimmten Integralen, welche Herr Hermite angewandt hat***), um den transcendenten Charakter der Zahl e festzustellen. In § 1 sind deshalb die betreffenden Formeln zusammengestellt; § 2 und § 3 geben die Anwendung dieser Formeln zum Beweise des erwähnten Satzes; § 4 enthält weitere Verallgemeinerungen.

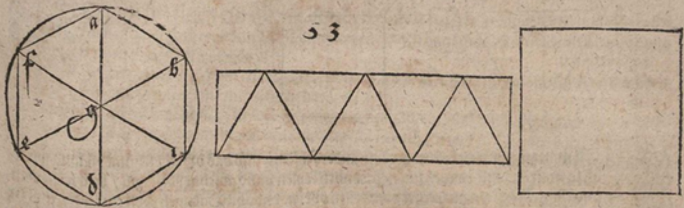
---

*) Vergl. eine Mittheilung des Hrn. Weierstrass an die Berliner Akademie, vom 22. Juni 1882.

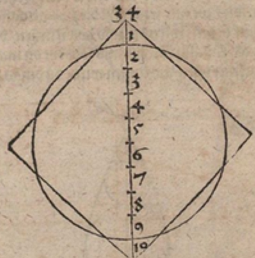
**) Man sehe die Artikel *Cyclometrie, Quadratur* und *Rectification* in Klügel's mathematischen Wörterbuche.

***) Sur la fonction exponentielle, Paris 1874 (auch Comptes rendus, t. LXXVII, 1873).

gel in einander. Darnach ſetz auf ytliche ſeyten ein halben dryangel/aus diſen ſechs dryangelen wirdt ein ablange fierung von gleichẽ winckelen/die eben ſo vil inhelt/als das ſechs eck. Darnach mach die ablang fierung zů einer rechten/wie du for bericht biſt/diſe wirdt eben ſo vil inhalten als das ſechs eck wie du das in der folgeten figur ſiheſt. Alſo magſtu jm auch thůn mit allerley geregulirten figuren/ ſie haben ſo vil eck als ſie wöllen.



Von nöten wer zu wiſſen quadratura circuli/das iſt/die vergleychnus eines cirkels/vnd eines quadrates/alſo das eins als vil inhielt als das ander/aber ſoliches iſt noch nit von den gelerten demonſtrirt Mechanice/aber das iſt beyleyfig/alſo das es im werck nit/oder gar ein kleins felt mag diſe vergleychnus alſo gemacht werden. Reyß ein fierung vñ teyl den ortſtrich in zehen teyl/vnd reys darnach ein cirkelris des Diameter ſoll acht teyl haben/ wie die quadratur zeichne hat/ wie ich das vnden hab aufgeriſſen.



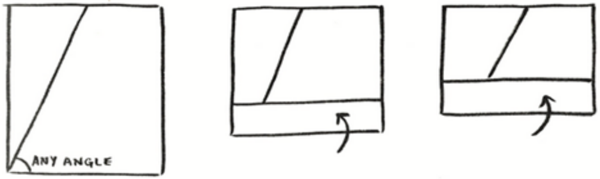
So man ein dryangel von vngleychen ſeyten macht/vñ der doch ein rechten winckel hat/ was man dann für ein figur aus den ſelben ſeyten in ſich ſelbs zeucht/ſo helt alweg die lengſt ſeyten oder die ſelb figur die man daraus macht ſo vil innen als die anderen zwo/ des ſind zweyerley figur hernach aufgeriſſen. Erſtlich der dryangel a.b.c. in ſich ſelbs in dryangel zogen/die ander d.e.f. in ſich ſelbs zu quadraten zogen.

Näherungskonstruktion der Quadratur des Kreises nach Albrecht Dürer

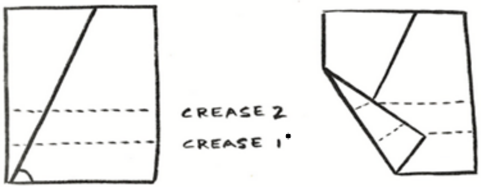
"Vonnöten wäre zu wissen Quadratura circuli, das ist die Gleichheit eines Zirkels und eines Quadrates, also daß eines ebenso viel Inhalt hätte als das andere. Aber solches ist noch nicht von den Gelehrten demonstrirt. Mechanice, das ist beiläufig, also daß es im Werk nicht oder nur um ein kleines fehlt, mag diese Gleichheit also gemacht werden. Reiß eine Vierung und teile den Ortsstrich in zehn Teile und reiße danach einen Zirkelriß, dessen Durchmesser acht Teile haben soll, wie die Quadratur deren 10; wie ich das unten aufgerissen habe."

Albrecht Dürer in "Vnderweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt"
Quelle: Wikipedia: Quadratur des Kreises

Trisect an angle, the origami way



Start with any angle drawn from the corner of a piece of paper.



Fold it once and then over again so you have two parallel lines (crease 1 and crease 2).

Fold the corner so it just touches crease 1, while crease 2 touches the original angle line.

You will now have two points on crease 1: where the corner touched it and where the new fold crosses it. Join these to the corner and the angle is divided exactly in thirds!

aus: Parker: Things to make and do in 4 dimensions

<u>moderne Forschung:</u>

Welche mathematischen Konfigurationen lassen sich mit Origami konstruieren?

→ Dreiteilung eines Winkels ist möglich

Darstellende Geometrie

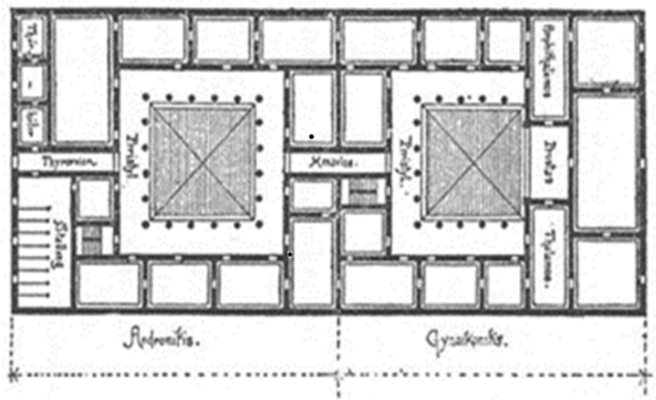
Der Teilbereich der Geometrie, der sich mit den geometrisch-konstruktiven Verfahren von Projektionen dreidimensionaler Objekte auf eine zweidimensionale Darstellungsebene befasst.

- zeichnerische Lösung raumgeom. Objekte
- Schattenwurf und Schnittkurven
- Kartographie
- technische Zeichnungen

röm. Baumeister Vitruvius

verfasste zehn Bücher über Architektur.

Darin u.A. Zentralprojektion erklärt.

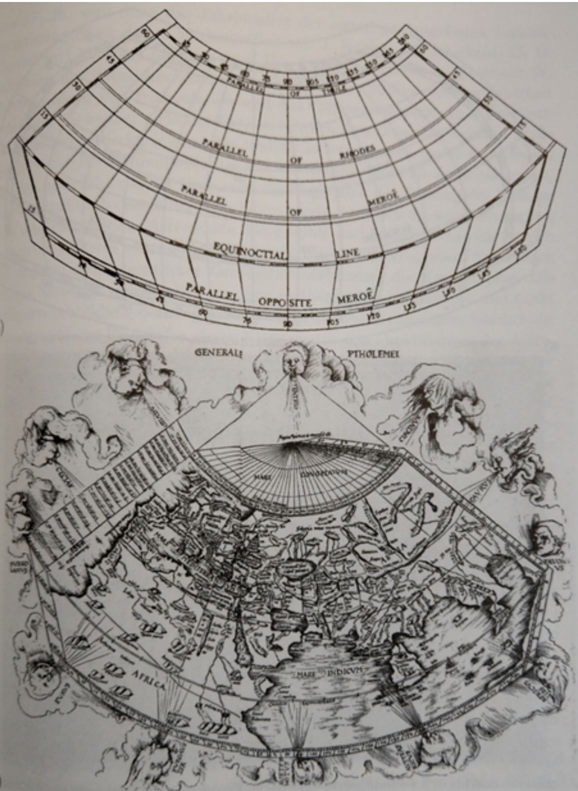


links: Seite aus Vitruvius‘ Text in Abschrift aus dem 15.Jhd
rechts: Grundriss eine Hauses, gezeichnet von Vitruvius

Kartenabbildungen

Problem:

Flächen-, Winkel-, Längentreue



a)

b)

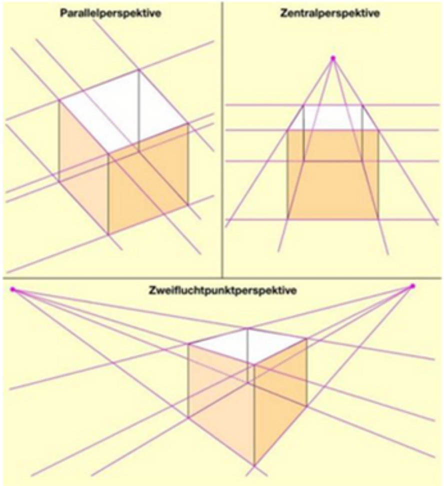
Abb. 5.2.2 Weltkarte des Ptolemaios
a) Rekonstruktion der Kegelprojektion des Ptolemaios, b) Karte der bewohnten Welt in Kegelprojektion (Straßburg 1513), rekonstruiert aus den Längen- und Breitenangaben im Handbuch der Geographie des Ptolemaios
[a) aus Lloyd A. Brown: The Story of Maps, Bonanza Books, New York 1949, neue Ed. Dover Publ. Inc., Mineola 1990; b) Herzog-August-Bibliothek, Wolfenbüttel 1.2. 4.1 Geogr. 2°]

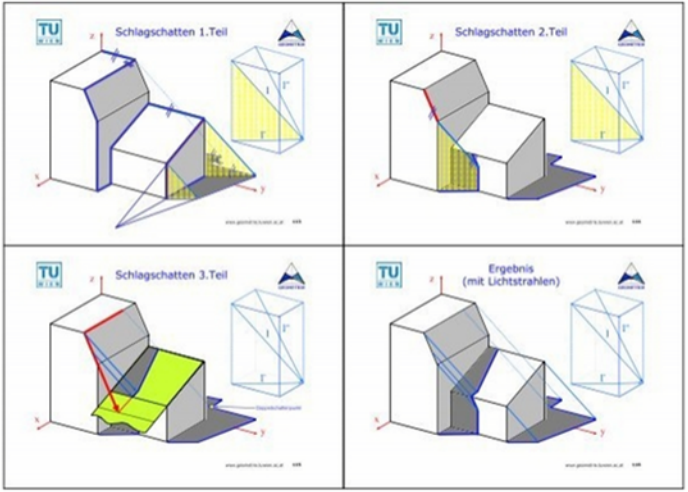
b)

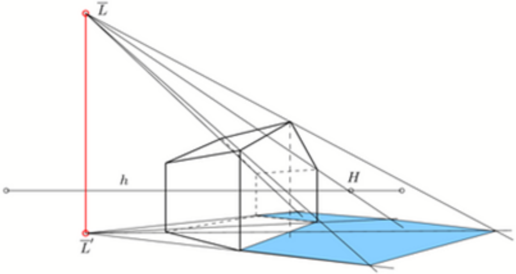
Abb. 5.2.3 Modifizierte sphärische Projektion des Ptolemaios
a) Rekonstruktion der modifzierten sphärischen Projektion des Ptolemaios, b) Weltkarte von Nicolaus Germanus aus der ersten in Deutschland gedruckten Ptolemaios-Ausgabe (Ulm 1482)
[a) aus Lloyd A. Brown: The Story of Maps, Bonanza Books, New York 1949, neue Ed. Dover Publ. Inc., Mineola 1990; b) Herzog-August-Bibliothek, Wolfenbüttel 2.2 Geogr. 2°]

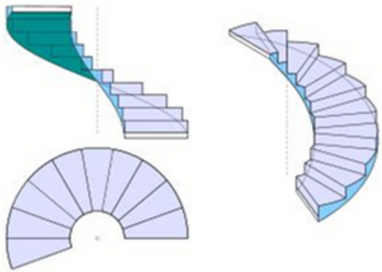
z.B. stereographische Projektion ist winkeltreu

Bauzeichnungen, technische Zeichnungen:







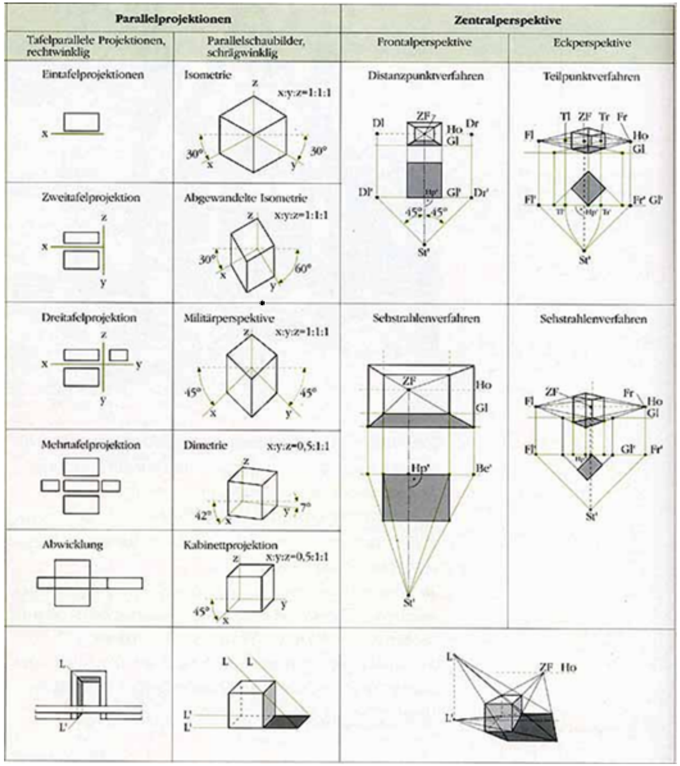


3. Geschichte

Wie stellt man Perspektive dar?

- prominente Frage unter Malern der Renaissance (15./16. Jhd)

- verwendete Grundregeln:
  - eine Gerade bleibt in der Perspektive eine Gerade
  - Parallele Geraden bleiben entweder parallel oder treffen sich in einem gemeinsamen weit entfernten Perspektivpunkt



Leon Battista Alberti (14.2.1404 – 25.4.1472)

Italienischer Humanist, Schriftsteller, Kunsttheoretiker, Mathematiker, ... der Renaissance.

- War lange Kleriker und Angestellter der Päpstlichen Kanzlei.
- Uneheliches Kind eines reichen Florentiner Kaufmanns.
- Akademisches Multitalent
- Schrift **De Piktura** (über die Malkunst) 1435/1436
  Versuch die Malerei auf eine wissenschaftliche Basis zu stellen.
  Das erste Buch behandelt die Geometrie Euklids, Optik und deren Anwendungen in der perspektivischen Malerei.
  Er entwickelt neue Theorie des Sehens und der Perspektive mit Hilfe von Guckkasten und Fadengittern. Heute bekannt als
  → Albertis Methode

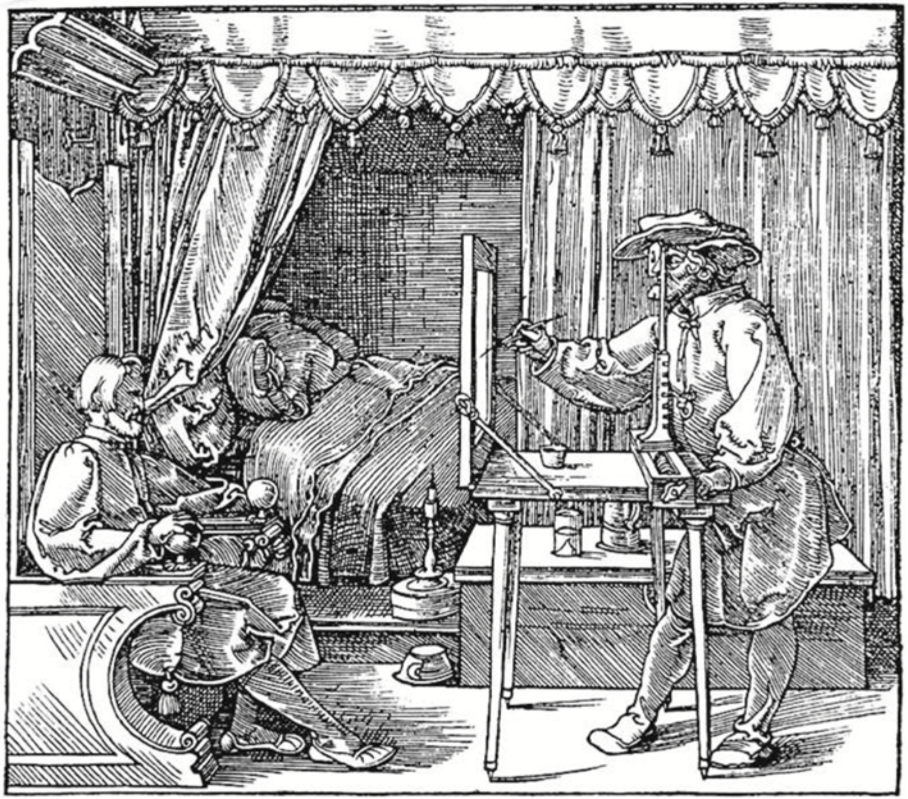


Figure 8.2: Dürer's depiction of Alberti's veil

Albrecht Dürer

(1471 – 1528)

Nürnberg
Maler, Grafiker,
Mathematiker,
Kunsttheoretiker

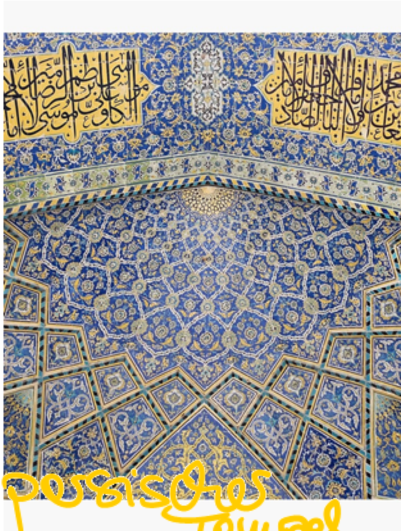
Selbstportrait mit 13 Jahren

4. Geschichte

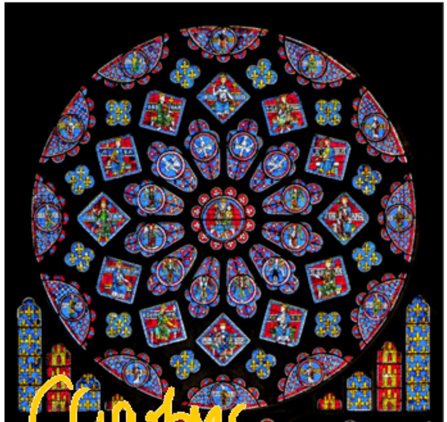
GEOMETRIE UND ARCHITEKTUR

- Vitruvius (s.o.) übersetzt ins Italienische vom Architekten Cesare Cesariano (~1500)
- Viele Bauwerke nutzen geometrische Strukturen und Konstruktionsprinzipien sowohl dekorativ als auch strukturell
- ganze Bauwerke basieren auf Geometrie

New York



persisches Tempel

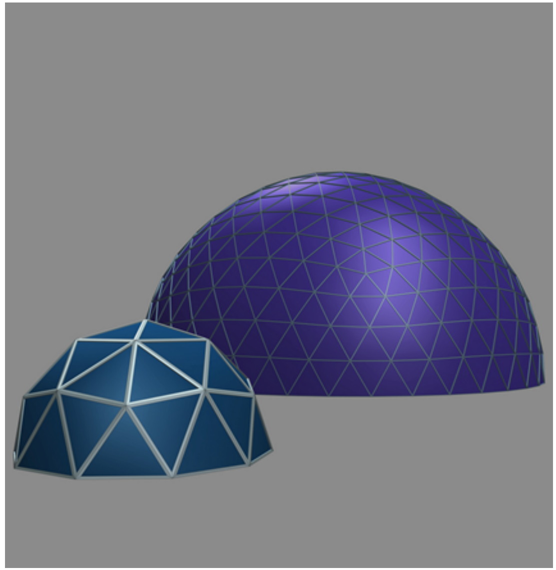


Chartres

Louvres

Alhambra

Buckminster Fuller's Geodesic Dome



US Pavillon der Weltausstellung in Montreal 1967
jetzt Biosphären Museum

5. Geschichte

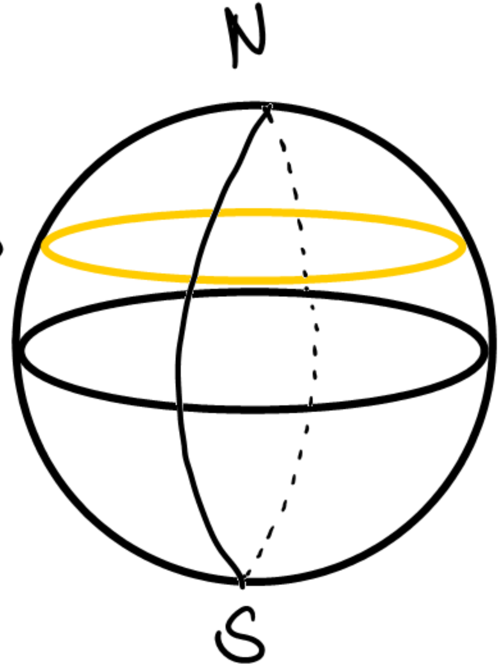
Das Parallelenpostulat

Zwei Geraden sind parallel
(d.h. schneiden sich nicht)
oder schneiden sich in
genau einem Punkt.

gilt in der Euklidischen Geometrie
Euklid versuchte dieses Axiom aus den anderen
zu beweisen.
19. Jhd ⇝ Modelle, die dieses Axiom nicht erfüllen

SPHÄRISCHE GEOMETRIE

Es gibt keine Parallelen



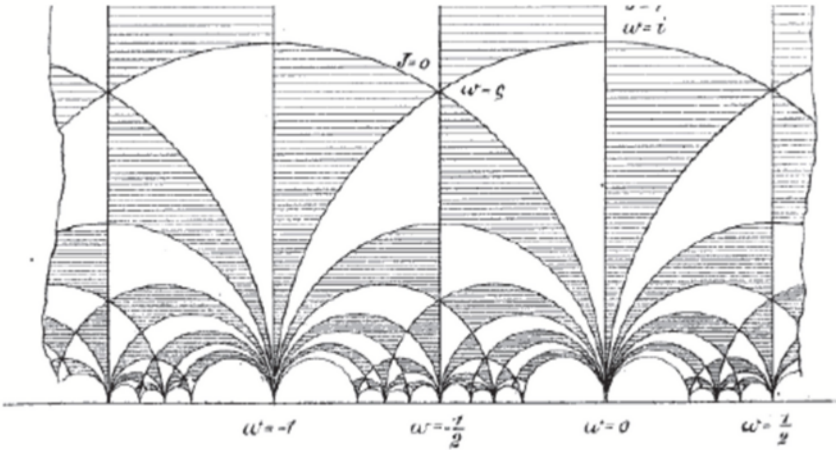
keine kürzeste Strecke zwischen Pkten auf der gelben Kurve

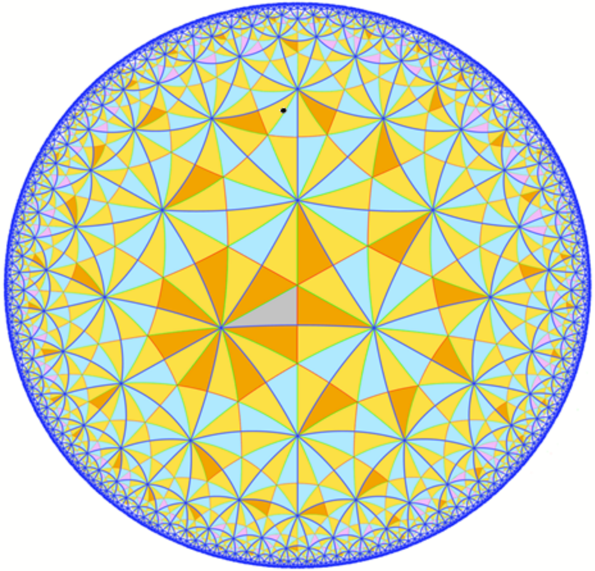
⇝ Fluglinien

HYPERBOLISCHE GEOMETRIE

Oberes Halbebenen Modell

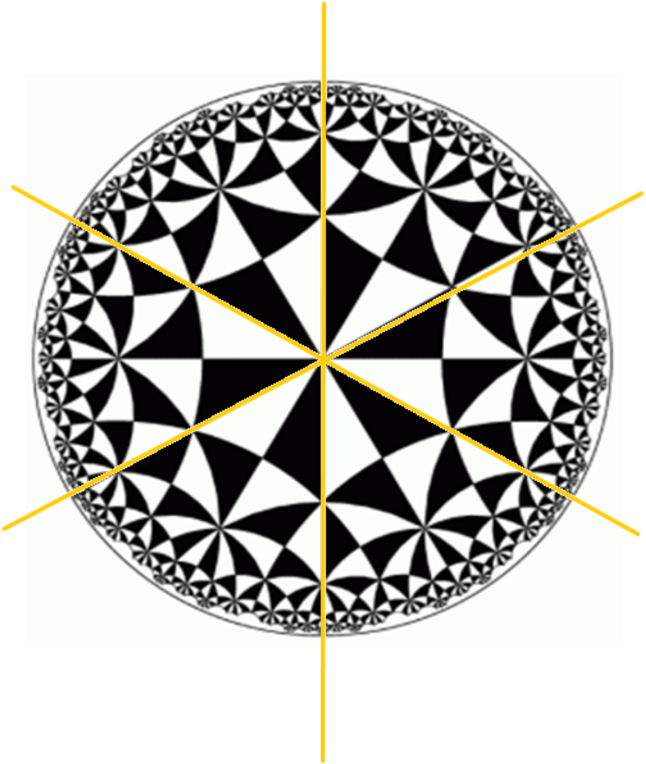
Poincaré Kreisscheibe





Ende 19. Jhd. entdeckt von
Felix Klein (D), Eugenio Beltrami (Italien)
Janos Bolyai (Ungarn), Nikolai Lobachevski (Russland)

Donald Coxeter & M.C. Escher



Engel und Teufel (1941)

- Scriba-Schreiber: 5000 Jahre Geometrie, Springer Verlag
- Würfelverdoppelung und Winkeldreiteilung mit Origami: https://ifm.mathematik.uni-wuerzburg.de/~nedrenco/origami/papierfalten-poster2014.pdf
- Petsinis - Der französische Mathematiker (Roman)
- Monge: Darstellende Geometrie (1798), Vollständiger Text ins deutsche übersetzt von Robert Haussner, 1900, Leipzig.
- Matt Parker, Things to make and do in the fourth dimension, Penguin Verlag

Vielen Dank!