Gauß, Kalman, Nowitzki

Carl Friedrich Gauß
(30.4.1777–23.2.1855)

Carl Friedrich Gauß

Schon zu Lebzeiten *Princeps mathematicorum* genannt.
Bedeutende Beiträge zur Mathematik:

- Nicht-euklidischen Geometrie
- Primzahlverteilung, Methode der kleinsten Quadrate
- Elliptischen Funktionen
- Fundamentalsatz der Algebra, Verwendung komplexer Zahlen
- Zahlentheorie
- Statistik (Normalverteilung)
- Potentialtheorie
- Differenzialgeometrie

Aber auch Beiträge in anderen Gebieten

- Astronomie
- Landvermessung und Erfindung des Heliotrops
- Gaußsche Krümmung und Geodäsie
- Magnetismus, Elektrizität und Telegrafie
- Sonstiges (Gaußsche Osterformel)

THEOREMATIS

OMNEM FVNCTIONEM ALGEBRAICAM RATIONALEM INTEGRAM

VNIVS VARIABILIS

IN FACTORES REALES PRIMI VEL SECVNDI GRADVS

RESOLVI POSSE

AVCTORE

CAROLO FRIDERICO GAVSS.

Dissertation!

HELMSTADII

APVD C. G. FLECKEISEN. 1799.

Fundamentalsatz der Algebra

Es seien $a_d, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und $a_d \neq 0$. Das Polynom

$$p(z) = a_d\, z^d + \ldots + a_1\, z + a_0$$

hat eine Nullstelle $\xi \in \mathbb{C}$, d.h. $p(\xi) = 0$.

Konsequenz: Jedes Polynom $p(z)$ kann geschrieben werden als

$$\boxed{p(z) = a_d \prod_{j=1}^{d} (z - \xi_j)}$$

Dabei sind ξ_j, $j = 1, \ldots, d$ die Nullstellen von p.

Françoise Viète
(?? 1540–23.2.(?)1603)

Lateinisierte Form: Franciscus Viëta

Französischer Advokat und Mathematiker. Er führte die Benutzung von Buchstaben als Variablen in die mathematische Notation der Neuzeit ein. Er gilt als eigentlicher Begründer der Algebra im Europa der Neuzeit.

Satz von Viëta

Zusammenhang zwischen den Nullstellen eines Polynoms und den Koeffizienten des Polynoms. Ist
$p(z) = z^3+a_2z^2+a_1x+a_0 = (z-\xi_1)(z-\xi_2)(z-\xi_3)$,
so gilt

$$\begin{aligned} -a_0 &= \xi_1\xi_2\xi_3 \\ a_1 &= \xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3 \\ -a_2 &= \xi_1+\xi_2+\xi_3 \end{aligned}$$

Beweisidee des Fundamentalsatzes (nach Gauß)

Das Polynom

$$p(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

kann geschrieben werden als

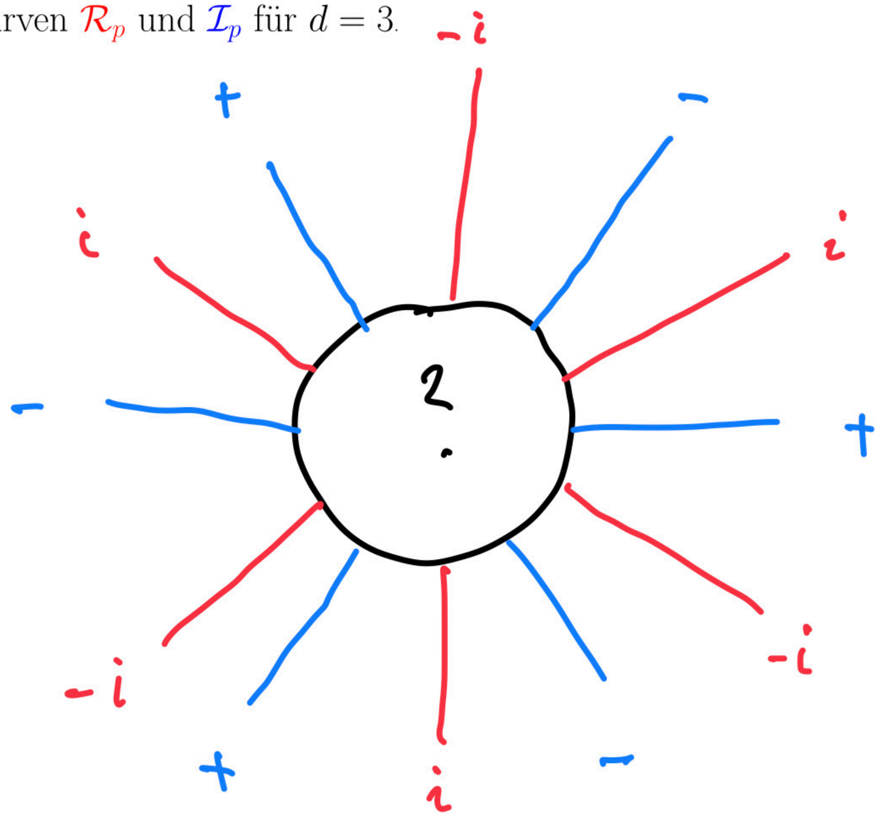
$$p(z) = z^d \left(1 + \frac{a_{d-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^d}\right)$$

Also verhält sich p für große Werte von z wie $z \mapsto z^d$.
Um die Existenz von Nullstellen nachzuweisen, genügt es die Mengen (Kurven)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_p &= \{z \,|\, \mathrm{Re}(p(z)) = 0\} \\ \mathcal{I}_p &= \{z \,|\, \mathrm{Im}(p(z)) = 0\} \end{aligned}$$

zu betrachten. Eine Nullstelle von p entspricht einem Schnittpunkt der Kurven $\mathcal{R}_p$ und $\mathcal{I}_p$.

Die Kurven $\mathcal{R}_p$ und $\mathcal{I}_p$ für $d = 3$.



Das ist die Grundidee der Dissertation, die Gauß im Jahre 1799 in Helmstedt vorlegte.

Im Laufe seines Lebens gab Gauß noch drei weitere Beweise des Fundamentalsatzes. In den Jahren 1815 und 1816 und aus Anlass seines 50. Doktorjubiläums im Jahre 1849. Verbesserte Version der Dissertation mit explizitem Gebrauch komplexer Zahlen.

Fig. 1.

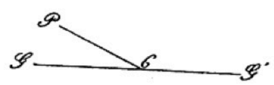


Fig. 2.

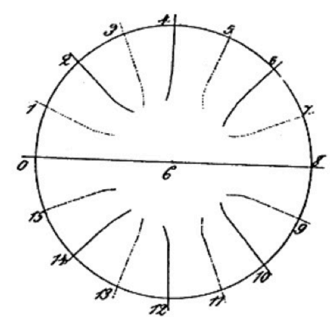


Fig. 4.

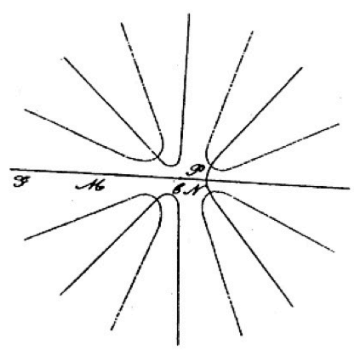
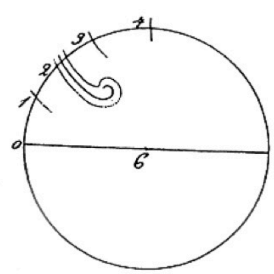
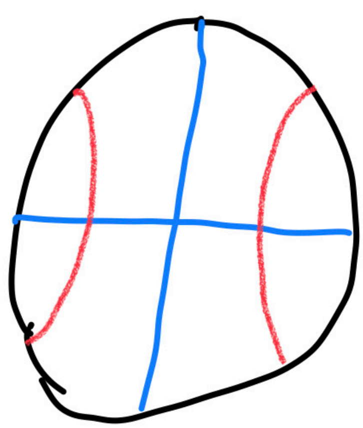


Fig. 3.

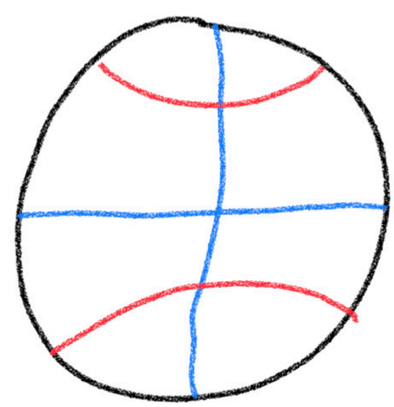


Für $p(z) = z^2 + a_1 z + a_0$ mit a_1, $a_0 \in \mathbb{R}$ erhalten wir für $\mathcal{R}_p$ und $\mathcal{I}_p$

zwei reelle Nullstellen



zwei nicht reelle Nullstellen



Dirk Werner Nowitzki

(19.6.1978–)

Ehemaliger deutscher Basketballspieler. Er spielte von 1998 bis 2019 in der nordamerikanischen Profiliga NBA für die Dallas Mavericks. Bekam als erster Europäer den NBA Most Valuable Player Award für die Saison 2006/07. 2011 gewann er als erster Deutscher die NBA-Meisterschaft.

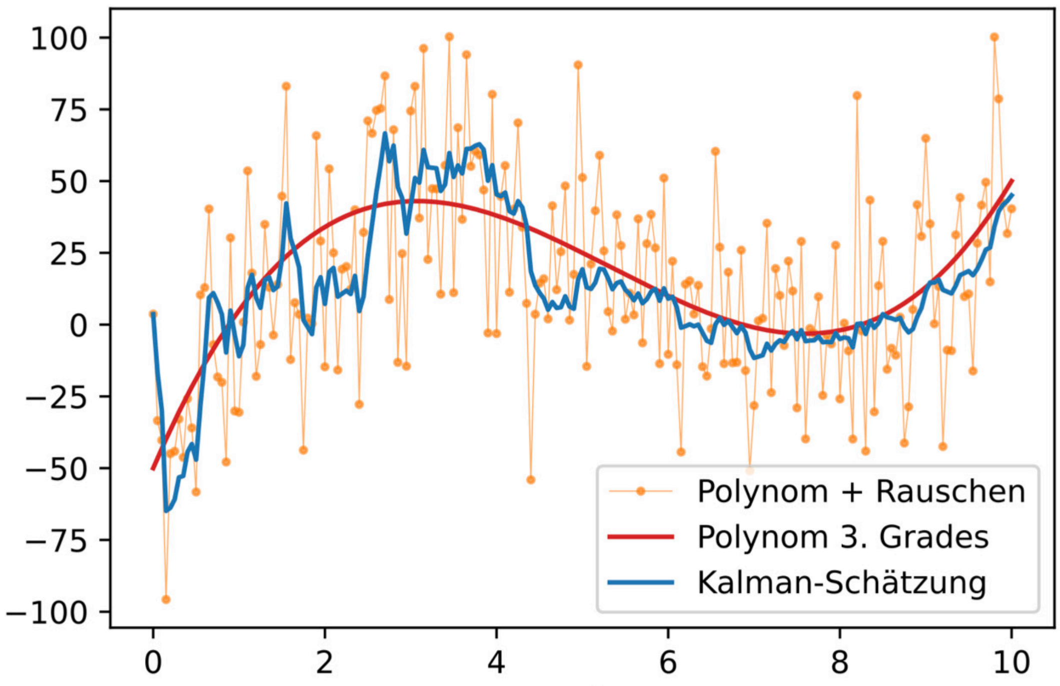
Die topologischen Struktur dieser Kurven wird als Signatur (nach N. A´Campo (2020)) eines Polynoms bezeichnet. F. Bergeron (2011) nennt diese Strukturen Basketball.

Rudolf Emil Kálmán

(19.5.1930–2.7.2016)

Kálmán war ein US-amerikanischer Elektroingenieur und Mathematiker ungarischer Herkunft. Er entwickelte 1960 den nach ihm benannten Kalman-Filter und untersuchte Systeme auf ihre Steuerbarkeit und Stabilisierbarkeit durch Rückkopplung (Kalman-Kritrium).

Kalman Filter



Lineare Systeme (LTI-Systems)

Ein lineares System wird durch eine Differenzialgleichung beschrieben.

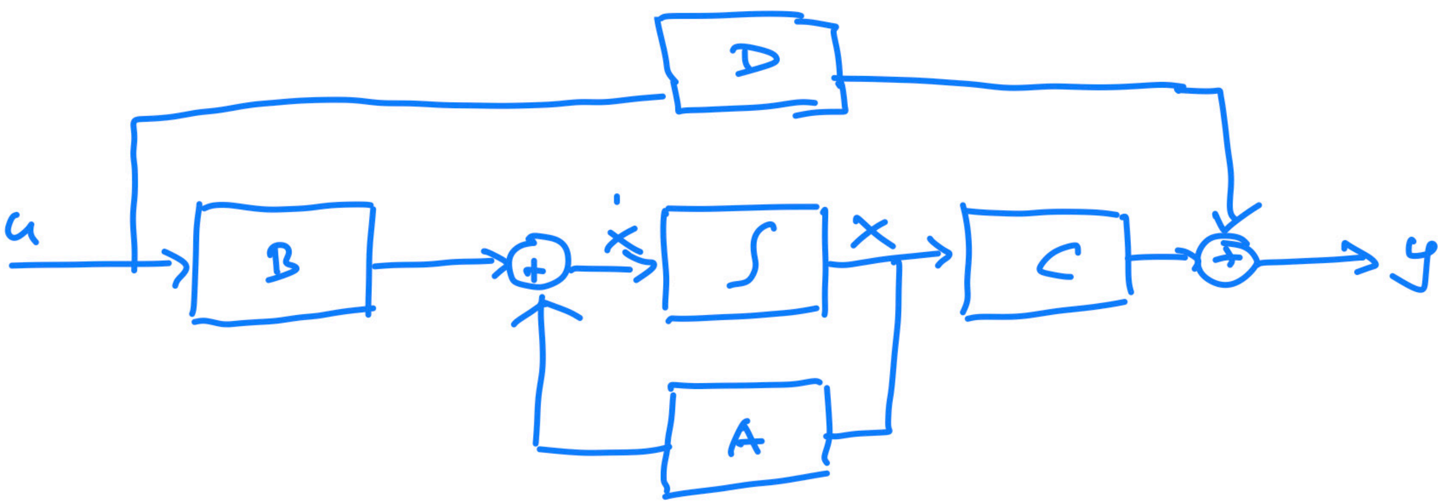
$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\,x + B\,u \\ y &= C\,x + D\,u; \end{aligned}$$

dabei sind

- $x \in \mathbb{R}^n$ Zustände des Systems
- $u \in \mathbb{R}^m$ Eingabe, Steuerung, input
- $y \in \mathbb{R}^m$ Ausgabe, Systemantwort, output

Sowie die Systemmatrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Blockdarstellung eines LTI-Systems



Hauptfragestellungen bei LTI-Systemen.

Beide Fragestellungen richten sich an ein System ohne Ausgabe! Also

$$\dot{x} = A\,x + B\,u.$$

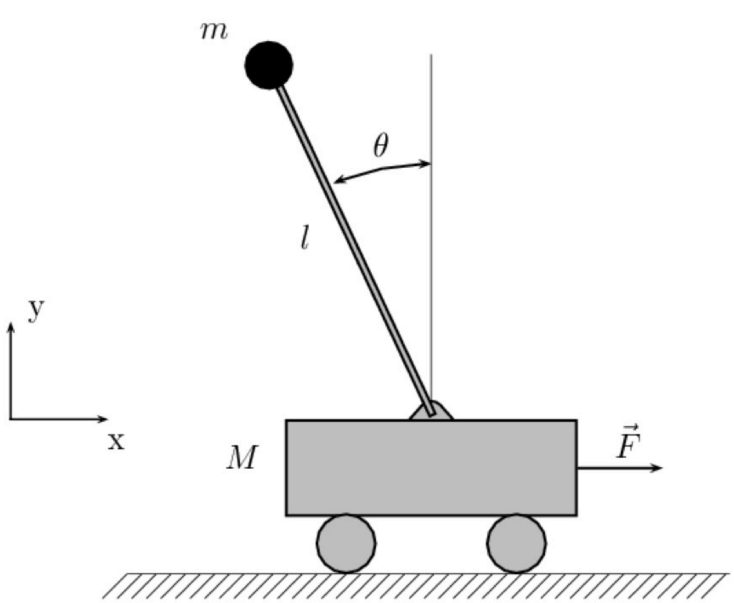
Steuerbarkeit

Bringe durch eine geeignete Steuerung $u : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ das System von dem Zustand x_0 in der Zeit T in den Zustand x_T.

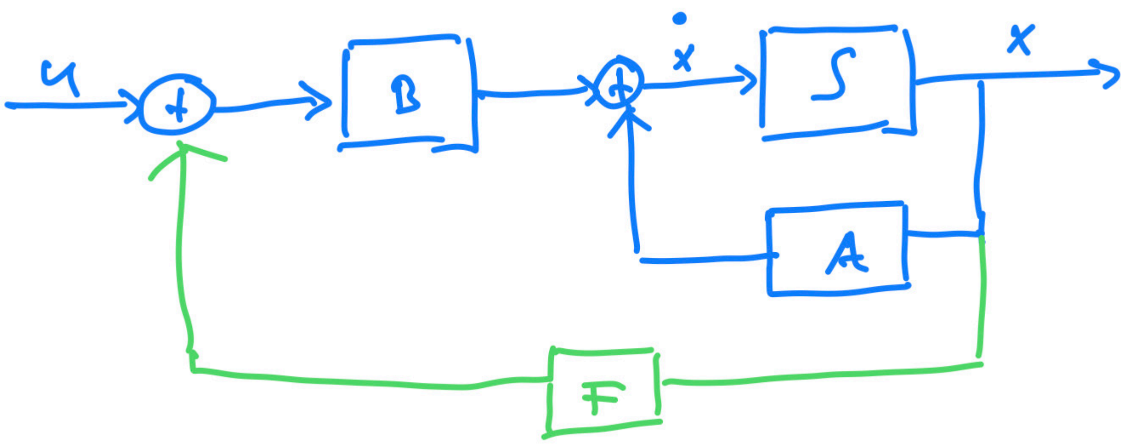
Stabilisierbarkeit durch Rückkopplung

Ein instabiles LTI-System soll durch eine Zustandsrückführung (Rückkopplung) stabilisiert werden.

Typische instabile Systeme



LTI-System mit Zustandsrückführung



Neue Gleichung

$$\dot{x} = Ax + B(Fx + u)$$
$$= (A + BF)x + Bu$$

Lösung der Probleme

Erstes Resultat

$$\boxed{\text{Steuerbarkeit} \Leftrightarrow \text{Stabilisierbarkeit}}$$

Zu der Systemmatrix A gehört das charakteristische Polynom

$$\chi_A(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$

mit reellen Koeffizienten. Die Lage der Nullstellen von χ_A entscheidet über die Stabilität des Systems. Liegen alle Nullstellen in der Menge $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) < 0\}$, so ist das System (asymptotisch) stabil.

Bei einer vollständigen Rückkopplung verändert sich das charakteristische Polynom zu

$$\chi_A^f(z) = z^n + (a_{n-1} + f_{n-1})z^{n-1} + \ldots + (a_1 + f_1)z + (a_0 + f_0),$$

dabei sind $f_{n-1}, \ldots, f_1, f_0$ beliebige (reele) Parameter. Nach Gauß und Viëta lassen sich zu beliebig vorgegebenen Nullstellen $\xi_1 \ldots, \xi_n$ die richtigen Werte von $f_{n-1}, \ldots, f_1, f_0$ finden. Für $n = 3$ gilt

$$\begin{aligned} -(a_0 + f_0) &= \xi_1\xi_2\xi_3 \\ a_1 + f_1 &= \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3 \\ -(a_2 + f_2) &= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \end{aligned}$$

Es gibt Fälle, in denen eine vollständige Rückkopplung nicht möglich ist.

Im einfachsten Fall kann nur ein einziger Zustand des Systems gemessen werden. Dann verändert sich das charakteristische Polynom so

$$\chi_A^k(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + (a_0 + k).$$

Wie hängen die Nullstellen von χ_A^k von k ab? Zusätzlich gibt es die (technische) Einschränkung $k \geq 0$.

Was sind notwendige Voraussetzungen an χ_A, damit die Chance besteht, dass die Nullstellen von χ_A^k für ein k in $\mathbb{C}^-$ liegen?

Satz von Gauß und Lucas

1836 Carl Friedrich Gauß ohne Beweis.

1879 von Félix Lucas bewiesen.

Die kritischen Punkte des Polynoms p sind die Nullstellen von p'.

Es gilt:

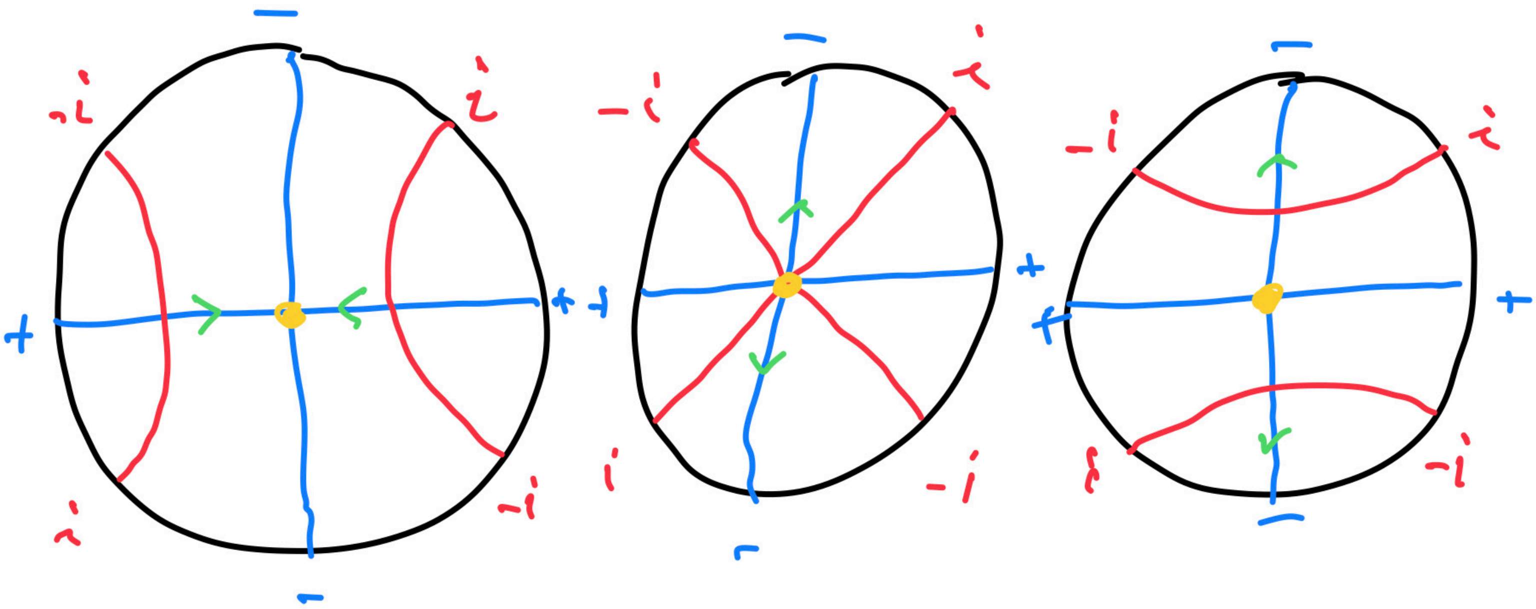
> Die kritischen Punkte eines Polynoms liegen in der konvexen Hülle der Nullstellen des Polynoms.

Für unser Problem bedeutet das:

> Liegen die kritischen Punkte von χ_A nicht in $\mathbb{C}^-$, so gibt es kein k, sodass alle Nullstellen von χ_A^k in $\mathbb{C}^-$ liegen.

Polynome vom Grad 2

2 reelle Nullstellen | 1 reelle Nullstelle | keine reelle Nullstelle



Notwendiges Kriterium

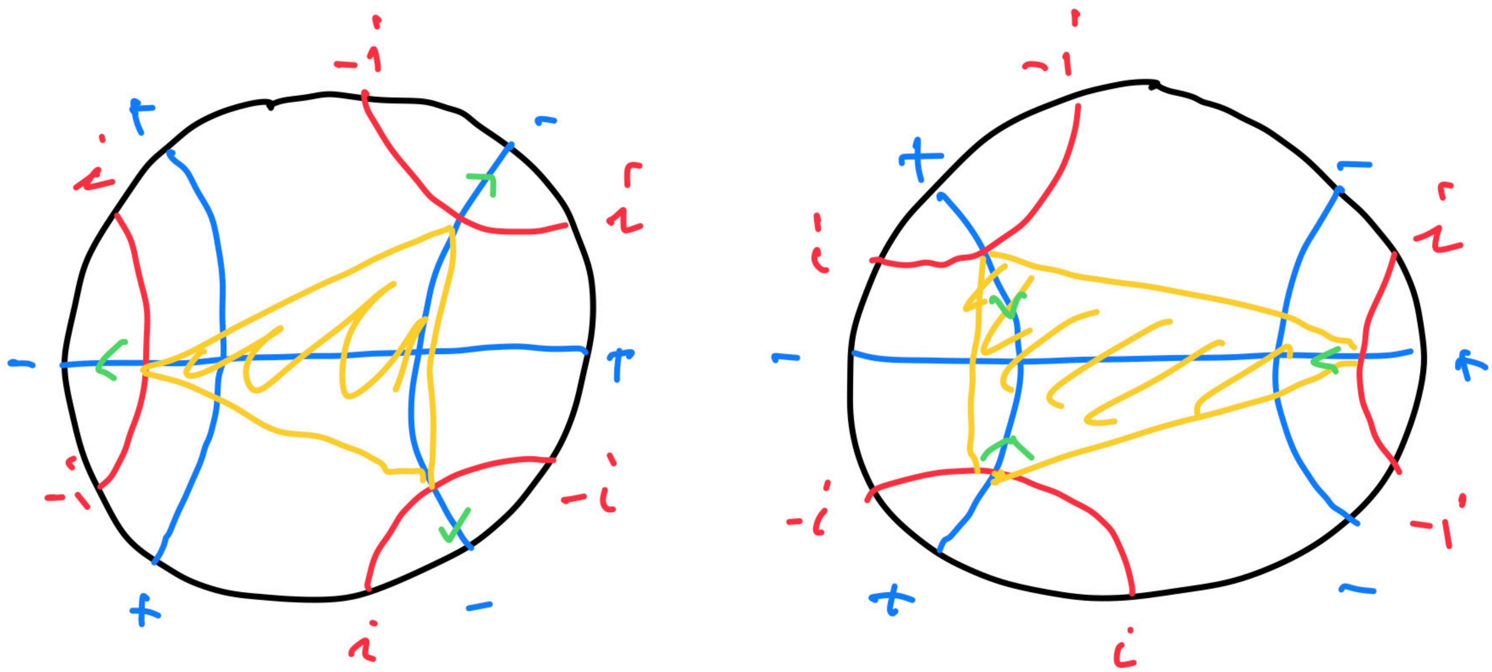
$$\boxed{\text{Die kritischen Punkte von } \chi_A \text{ liegen in } \mathbb{C}^-.}$$

Das Polynom

$$\chi_A(z) = z^3 + \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{16}z + \frac{17}{8}$$

hat die kritischen Punkte $\frac{-6\pm\sqrt{33}}{12} \in \mathbb{C}^-$. Für alle $k \geq 0$ sind die Nullstellen von χ_A^k nicht in $\mathbb{C}^-$ enthalten. Allerdings gibt es $k < 0$, sodass alle Nullstellen von χ_A^k in $\mathbb{C}^-$ liegen.

n = 3 und 2 reelle kritische Punkte



n = 3 und 2 nicht reelle kritische Punkte