

Übungsblatt 1

Abgabe: Donnerstag, den 12.04.2018, vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und ihren gewählten Übungs-termin.

Aufgabe 1.1

Sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und seien \mathcal{A} , \mathcal{B} und \mathcal{C} drei Basen von V . Beweisen Sie die *Kürzungsregel*

$$T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} = T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}.$$

Aufgabe 1.2

Im \mathbb{R}^3 seien die Basen \mathcal{A} und \mathcal{B} durch die Spalten der folgenden Matrizen definiert:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Transformationsmatrix $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ und bestimmen Sie die \mathcal{B} -Koordinaten von

$$v = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.3

Zeigen Sie, dass die Setzungen

$$A \sim B \Leftrightarrow A \text{ und } B \text{ sind äquivalent}, \quad A, B \in \text{Mat}(m \times n, K)$$

bzw.

$$A \sim B \Leftrightarrow A \text{ und } B \text{ sind ähnlich}, \quad A, B \in \text{Mat}(m \times m, K)$$

Äquivalenzrelationen definieren.

Aufgabe 1.4

Zeigen Sie Lemma 2.6.10 aus der Vorlesung: Zwei Matrizen sind genau dann äquivalent, wenn sie den gleichen Rang haben. Sie können dabei Aufgabe 1.3 als gegeben annehmen.

Aufgabe 1.5

Sei $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie $\text{rang}(A) = \text{rang}(AA^T)$. Entscheiden Sie, ob die Aussage auch für $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ gilt.