Übungsblatt 10

Abgabe: Donnerstag, den 14.06.2018 vor der Vorlesung.
Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und Übungstermin.

Aufgabe 10.1

Sei V ein 3-dimensionaler reeler Vektorraum mit Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$. Sei s die Bilinearform für die gilt

$$M_{\mathcal{A}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = (v_2 + v_3, v_1 + v_2, v_3)$ eine Basis von V ist und berechnen Sie $M_{\mathcal{B}}(s)$.

Aufgabe 10.2

Sei $V = \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ für einen beliebigen Körper K. Sei $s : V \times V \to K$ die Abbildung definiert durch $(A, B) \mapsto \mathrm{sp}(A^T B)$. Zeigen Sie, dass s eine Bilinearform ist. Untersuchen Sie, ob s im Fall $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ein Skalarprodukt definiert.

Aufgabe 10.3

Beweisen Sie die Polarisationsformel in Proposition 5.1.5: Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und V ein K-Vektorraum. Sei weiter s eine symmetrische Bilinearform und q die zugehörige quadratische Form. Dann gilt

$$s(v, w) = \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w)) \qquad \forall v, w \in V.$$

Warum wird die Annahme $\mathrm{char}(K) \neq 2$ gemacht?

Aufgabe 10.4

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine *komplexe Struktur auf V* ist ein $J \in \mathrm{End}(V)$ für den gilt $J^2 = -\mathrm{id}_V$.

- Geben sie ein Beispiel für eine komplexe Struktur auf dem $\mathbb{R}^2$ an.
- Zeigen Sie, dass V zusammen mit der Skalarmultiplikation

$$\mathbb{C} \times V \to V, \ \ ((a + \mathrm{i}b), v) \mapsto av + bJ(v)$$

  einen $\mathbb{C}$-Vektorraum bildet.
- Zeigen Sie, dass ein endlichdimensionaler reeler Vektorraum mit einer komplexen Struktur eine gerade Dimension hat.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 10.5
Sei $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt. Für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\phi_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad w \mapsto s(v, w)$$

eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{\phi_v : v \in \mathbb{R}^n\}$$

einen reelen Vektorraum bildet und beschreiben Sie diesen möglichst genau.