Übungsblatt 11

Abgabe: Donnerstag, den 21.06.2018 vor der Vorlesung.
Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und Übungstermin.

Aufgabe 11.1

Sei V ein unitärer oder euklidischer Vektorraum mit zum Skalarprodukt gehöriger Norm $||.||$. Beweisen Sie die Gleichung

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2,$$

interpretieren Sie sie geometrisch, und beweisen Sie den Satz des Pythagoras.

Aufgabe 11.2

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix und $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ der Untervektorraum, der von den Zeilen von A aufgespannt wird. Bestimmen Sie $Z^\perp$ bezüglich des Standardskalarprodukts.

Aufgabe 11.3

Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ Untervektorräume eines euklidischen oder unitären Vektorraums V.

- Untersuchen Sie, für welche mathematische Operation $\square$ die folgende Gleichung richtig ist:
$$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \square W_2^\perp$$
- Falls $V = W_1 \oplus W_2$ dann ist $W_1^\perp = W_2$.

Aufgabe 11.4

Auf $V = \mathrm{span}(1, t, t^2, t^3) \subset \mathbb{R}[t]$, dem Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens 3, sei das folgende Skalarprodukt definiert:

$$s(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix von s und eine Orthonormalbasis von V.

Aufgabe 11.5

Sei $\pi \in S_n$ eine Permutation. Überzeugen Sie sich, dass die Abbildung

$$f_\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f_\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$$

linear ist und bestimmen sie die Eigenwerte von f_π.

(Bitte umblättern!)

Bonusaufgabe

Nach Wahl einer Basis für $\mathbb{R}^n$ definiert die Vorschrift $\pi \mapsto f_\pi$ in Aufgabe 5 einen Gruppenhomomorphismus $S_n \to \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Einen solchen Homomorphismus nennt man eine *Darstellung* der S_n. Die Darstellungstheorie versucht Gruppen dadurch zu verstehen, wie sie auf Vektorräumen wirken können, d.h. durch ihre Darstellungen. Ein Untervektorraum $V \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *invariant* falls $f_\pi(V) \subseteq V$ für *jedes* $\pi \in S_n$.

Finden Sie eine Zerlegung $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ in mindestens zwei invariante Unterräume positiver Dimension. Enthalten ihre V_i noch kleinere invariante Unterräume?