# Übungsblatt 2

**Abgabe: Donnerstag, den 19.04.2018, vor der Vorlesung.**

**Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und ihren gewählten Übungstermin.**

### Aufgabe 2.1

Sind folgende Matrizen invertierbar? Wenn ja, geben Sie die inverse Matrix an.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{Q}), \qquad \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{Q})$$

### Aufgabe 2.2

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

einmal als Element von $\mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Q})$ und einmal als Element von $\mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Prüfen Sie jeweils ob $A$ invertierbar ist und geben Sie wenn möglich die Inverse an.

### Aufgabe 2.3

Seine $U_1, U_2 \subset K^n$ zwei Untervektorräume, die durch Basen gegeben sind. Geben Sie einen Algorithmus an, der eine Basis von $U_1 \cap U_2$ bestimmt.

### Aufgabe 2.4

Seien $A \in \mathrm{GL}(m, K)$, $B \in \mathrm{Mat}(m \times s, K)$, $C \in \mathrm{Mat}(r \times m)$ und $D \in \mathrm{Mat}(r \times s, K)$ so dass

$$\mathrm{rang} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = m.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt $D = CA^{-1}B$.

(Bitte umblättern!)

**Aufgabe 2.5**
Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ beliebig und $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass gilt

$$E_n - A^m = (E_n - A)(\sum_{i=0}^{m-1} A^i) = (\sum_{i=0}^{m-1} A^i)(E_n - A).$$

Hierbei soll per Konvention gelten $A^0 = E_n$.

Eine quadratische Matrix $A$ heißt *nilpotent* falls ein $m$ existiert mit $A^m = 0$. Zeigen Sie, wenn $A$ nilpotent ist, dann ist $E_n - A$ invertierbar. Wie sieht die inverse Matrix aus?