

Übungsblatt 3

Abgabe: Donnerstag, den 26.04.2018, vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 3.1

Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

Aufgabe 3.2

Zeigen Sie folgende Identitäten:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+2)$$

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + 1.$$

Aufgabe 3.3

Sei $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(n \times n, K)$ und $A' = ((-1)^{i+j}a_{ij})$. Zeigen Sie $\det(A') = \det(A)$.

Aufgabe 3.4

Eine Permutation $\pi \in S_n$ heißt *r-Zyklus* wenn es paarweise verschiedene $a_1, \dots, a_r \in \{1, \dots, n\}$ gibt, so dass gilt

$$\begin{aligned} \pi(a_i) &= a_{i+1}, & i &= 1, \dots, r-1, \\ \pi(a_r) &= a_1, \\ \pi(x) &= x, & x &\in \{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, \dots, a_r\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $\text{sign}(\pi)$ für einen r -Zyklus π .

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 3.5

Zeigen Sie per Induktion nach n die folgende Formel für die *Vandermonde-Determinante*:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Recherchieren Sie, was die Vandermonde-Determinante mit Interpolation zu tun hat.