Übungsblatt 4

Abgabe: Donnerstag, den 3.05.2018, vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und Übungstermin.

Aufgabe 4.1

Sei $A_n = \ker(S_n \to \{\pm 1\})$ die alternierende Gruppe und $\tau \in S_n$ eine beliebige Transposition. Zeigen Sie, dass sich S_n als disjunkte Vereinigung

$$S_n = A_n \cup \tau A_n \quad \text{mit} \quad A_n \cap \tau A_n = \emptyset$$

schreiben lässt. Argumentieren Sie auch, dass $\tau A_n = A_n \tau$ und damit auch $S_n = A_n \cup A_n \tau$ gilt. In der Vorlesung *Algebra* im SoSe 2019 werden Sie A_n einen *Normalteiler* der Gruppe S_n nennen, da sogar für jedes $\sigma \in S_n$ gilt $\sigma A_n \sigma^{-1} = A_n$. Bonusaufgabe (ohne Bewertung): Zeigen Sie diese allgemeinere Aussage.

Aufgabe 4.2

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ eine Matrix vom Rang r. Beweisen Sie, dass sich nur durch Streichen von Zeilen und Spalten eine quadratische $(r \times r)$-Untermatrix A' finden lässt, für die $\det(A') \neq 0$ gilt.

Aufgabe 4.3

Finden Sie ein x für das gilt

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -8 & 3 & 1 & 2 \\ 27 & 6 & 5 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & x & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 4.4

Beweisen Sie direkt mit Hilfe der Leibnizformel, dass die Determinante die Eigenschaften (D4)–(D11) erfüllt. Sie können diese Aufgabe alleine oder in einer Gruppe beliebiger Größe lösen. Für Gruppen gelten folgende Regeln:

- Jede Gruppe hat einen eindeutigen Namen.
- Jedes Gruppenmitglied hat ≥ 2 der Eigenschaften auf seiner/ihrer Abgabe bewiesen.
- Jede Eigenschaft wurde von der Gruppe ≥ 2 mal richtig bewiesen abgegeben.

Sind diese Punkte erfüllt, erhalten alle Teilnehmer der Gruppe einen Punkt.

Aufgabe 4.5

Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Ein Kommilitone behauptet

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$$

und argumentiert wie folgt:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} &= \det\left(A^2 - B^2\right) \\ &= \det\left((A+B)(A-B)\right) \\ &= \det\left(A+B\right)\det\left(A-B\right). \end{aligned}$$

1. Kommentieren Sie jeden Schritt des Beweises und argumentieren Sie entweder, dass der Schritt gültig ist, oder geben Sie ein Gegenbeispiel.
2. Stimmt die Aussage überhaupt? Tipp: Betrachten Sie das Produkt

$$\begin{pmatrix} E_n & B \\ 0 & A-B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$$

Bonusaufgabe (ohne Bewertung): Gibt es eine Formel für die Determinante $\det\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ einer allgemeinen Blockmatrix?