Übungsblatt 5

Abgabe: Mittwoch, den 9.05.2018, oder Freitag den 11.5.2018 in der Übungsgruppe (am Donnerstag den 10.05.2018 ist ein sog. Feiertag, den Sie sehr gut für Wiederholung nutzen können).
Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und Übungstermin.

Aufgabe 5.1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems mit der Cramerschen Regel.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.2

Sei V ein K-Vektorraum, X die Menge aller Basen von V und $\mathcal{B} \in X$ eine fixierte Basis. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : X \to \mathrm{GL}(n, K), \quad \mathcal{A} \mapsto M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$$

bijektiv ist. Wie hängt Φ im Fall $V = \mathbb{R}^n$ mit der kanonischen Bijektion $X \mapsto \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ zusammen, die eine Basis $\mathcal{A}$ auf die Matrix abbildet in der die Basisvektoren als Spalten stehen?

Aufgabe 5.3

Zeigen Sie, dass ein nilpotenter Endomorphismus Null als einzigen Eigenwert hat.

Aufgabe 5.4

Sei V ein K-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass wenn $F^2 + F$ den Eigenwert -1 hat, dass dann F^3 den Eigenwert 1 hat.

Aufgabe 5.5

Sei $p \in K[t]$ ein Polynom und $F \in \mathrm{End}(V)$. Dann kann $p(F)$ durch formales Einsetzen von F in p gebildet werden, d.h. für t^n wird $F^n = F \circ \cdots \circ F$ eingesetzt, usw.

- Sei λ ein Eigenwert von F. Zeigen Sie, dass dann $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(F)$ ist.
- Zeigen Sie, dass wenn $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ ähnlich sind, dass dann auch $p(A)$ und $p(B)$ ähnlich sind. Gilt auch die Umkehrung?