Übungsblatt 6

Abgabe: Donnerstag, den 17.05.2018 vor der Vorlesung.
Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und Übungstermin.

Aufgabe 6.1

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Interval und $V = \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen $I \to \mathbb{R}$. Bestimmen sie alle Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren des Endomorphismus von V, der eine Funktion auf ihre erste Ableitung abbildet.

Aufgabe 6.2

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Beweisen Sie Proposition 4.2.1: Für jedes $F \in \operatorname{End}(V)$ und $\lambda \in K$ gilt: λ ist Eigenwert von $F \Leftrightarrow \det(F - \lambda \mathrm{id}) = 0$.

Geben Sie jedes Mal, wenn Sie eine Aussage aus der Vorlesung benutzen, die Nummer oder die konkrete Aussage an. Ihr Beweis könnte also so beginnen: *Nach Definition 4.1.1 ist λ Eigenwert von F genau dann, wenn ein $v \in V$ existiert, welches nicht Null ist und für das gilt $F(v) = \lambda v$. ...*

Aufgabe 6.3

Beweisen Sie, dass die Spur einer Matrix eine Invariante unter Ähnlichkeit ist. Genauer: Bezeichne $\operatorname{sp}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ die Spur einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \operatorname{Mat}(n \times n, K)$. Dann gilt für jedes $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ die Gleichung $\operatorname{sp}(SAS^{-1}) = \operatorname{sp}(A)$. Tipp: Zeigen Sie die allgemeinere Aussage $\operatorname{sp}(AB) = \operatorname{sp}(BA)$ für beliebige Matrizen $A, B \in \operatorname{Mat}(n \times n, K)$.

Aufgabe 6.4

Sei $c \in \mathbb{R}$ und $A \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix, in der die Summe der Einträge jeder Spalte c ergibt. Beweisen Sie, dass c ein Eigenwert von A ist.

Aufgabe 6.5

Sei $A \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Beweisen Sie, dass alle Eigenwerte von A reell sind.