Übungsblatt 7

Abgabe: Donnerstag, den 24.05.2018 vor der Vorlesung.
Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und Übungstermin.

Aufgabe 7.1

Betrachten Sie die lineare Abbildung $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Finden Sie das charakteristische Polynom und entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 7.2

Sei $K[t]_{\leq n}$ der K-Vektorraum aller Polynome in der Unbestimmten t, mit Koeffizienten in K und vom Grad höchstens n. Sei weiter $D \in \operatorname{End}(K[t]_{\leq n})$ der Ableitungsoperator. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörgen Eigenräume von D, sowie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

Aufgabe 7.3

Zeigen Sie, dass für jede komplexe Matrix, die Determinante das Produkt der Eigenwerte und die Spur die Summe der Eigenwerte ist. Lässt sich diese Aussage (unter höchstens leichter Beugung von Definitionen) auf reele Matrizen verallgemeinern?

Aufgabe 7.4

Zeigen Sie, dass der Unterschied zwischen $\dim \operatorname{Eig}(F, \lambda)$ und $\mu(P_F, \lambda)$ in Lemma 4.3.2 beliebig gross werden kann. Hinweis: Die Dimension n des Vektorraums muss wegen $\mu(P_F, \lambda) \leq n$ mit dem gewünschten Unterschied wachsen.

Aufgabe 7.5

Angenommen Sie kennen das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in \operatorname{Mat}(n \times n, K)$. Welche Aussage(n) können Sie über den Rang von A treffen?