Übungsblatt 8

Abgabe: Donnerstag, den 31.05.2018 vor der Vorlesung.
Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und Übungstermin.

Aufgabe 8.1

Seien $P, Q \in K[t]$ zwei Polynome und $F \in \mathrm{End}(V)$ für einen K-Vektorraum V. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$P(F) \circ Q(F) = Q(F) \circ P(F) = (P \cdot Q)(F)$$

Zeigen Sie, dass (für fixes $F \in \mathrm{End}(V)$) die Abbildung

$$\Phi_F : K[t] \to \mathrm{End}(V), \quad P \mapsto P(F).$$

sowohl ein Ringhomomorphismus als auch ein K-Vektorraumhomomorphismus ist.

Aufgabe 8.2

Sei V endlichdimensionaler K-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus mit $F^2 = F$. Zeigen Sie, dass eine Basis von V existiert, in der F diagonal ist, so dass $0, 1$ die einzigen Einträge auf der Diagonalen sind. Alternativ, zeigen Sie, dass $V = \ker(F) \oplus \mathrm{Eig}(F, 1)$ (Warum ist das äquivalent?).

Bonus: Welche Zerlegung von V folgt aus $F^3 = F$?

Aufgabe 8.3

Fertigen Sie eine Tabelle an, die für die folgenden Eigenschaften von Matrizen angibt, unter welchen Operationen diese erhalten bleiben. Geben Sie auch möglichst immer die Stelle im Skript an, wo das entsprechende Problem diskutiert wird.

Eigenschaften: Kern, Bild, Rang, Spur, Determinante, char. Polynom, Diagonalisierbarkeit, Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume.

Operationen: Jede der ihnen bekannten elementaren Zeilenoperationen, Spaltenoperationen, Ähnlichkeitstransformation (d.h. $A \mapsto SAS^{-1}$ für $S \in \mathrm{GL}(n, K)$), Quadrieren ($A \mapsto A^2$), Verdopplen ($A \mapsto 2A$).

Aufgabe 8.4

Betrachten Sie den Endomorphismus F des $\mathbb{Q}^2$, der in der Standardbasis durch die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben ist. Der Trigonalisierungssatz sagt, dass eine Basis $\mathcal{B}$ existiert, so dass $M_{\mathcal{B}}(F)$ obere Dreiecksform hat. Welche Wahlen werden im Beweis getroffen und wie beeinflussen diese die konkrete Form von $M_{\mathcal{B}}(F)$? Wann ist $M_{\mathcal{B}}(F)$ wieder diagonal? Können sie die Familie aller als $M_{\mathcal{B}}(F)$ vorkommenden oberen Dreiecksmatrizen beschreiben?

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 8.5

Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K und F, G, H lineare Abbildungen, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "H"] & V \arrow[d, "H"] \\ W \arrow[r, "G"] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert. Zeigen Sie:

- Ist H injektiv, so ist jeder Eigenwert von F auch Eigenwert von G.
- Ist H surjektiv, so ist jeder Eigenwert von G auch Eigenwert von F.