Übungsblatt 9

Abgabe: Donnerstag, den 07.06.2018 vor der Vorlesung.
Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und Übungstermin.

Aufgabe 9.1

- Sei K ein Körper. Bestimmen sie alle Ideale von K.
- Zeigen Sie, dass jedes Ideal $I \subset \mathbb{Z}$ von der folgenden Form ist:

$$I = \langle n \rangle = \{z \in \mathbb{Z} : n \text{ teilt } z\}.$$

Aufgabe 9.2

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ alle paarweise verschiedenen Eigenwerte eines diagonalisierbaren Endomorphismus $F \in \operatorname{End}(V)$ mit $\dim V = n < \infty$. Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von F die Gestalt $M_F = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_r)$ hat.

Aufgabe 9.3

Diagonalisierung und Jordan-Normalform sind nützlich um Funktionen von Matrizen leichter auswerten zu können. Seien $A, B \in \operatorname{Mat}(n \times n, K)$, $S \in \operatorname{GL}(n, K)$ und $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

- $(SAS^{-1})^m = SA^mS^{-1}$, und
- falls $AB = BA$, so gilt der binomische Lehrsatz $(A + B)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} A^i B^{m-i}$.

Sei nun konkret

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $A = S(D + N)S^{-1}$ mit D diagonal, N nilpotent und $DN = ND$. Berechnen Sie ohne Computerhilfe A^{50}.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 9.4

Sei $V = \mathbb{R}^7$ und F ein Endomorphismus mit dem charakteristischen Polynom

$$P_F = (t^2+1)^2(t-2)(t^2-1) \in \mathbb{R}[t].$$

Nutzen Sie die Sätze 4.5.2 und 4.6.5 um eine möglichst einfache Matrixdarstellung von F anzugeben.

Aufgabe 9.5

Sei $F \in \mathrm{End}(V)$ eine Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums V. Geben Sie für die folgenden Fälle das Minimalpolynom von F an:

- $F = \mathrm{id}_V$.
- $F = 0$.
- $V = V_1 \oplus V_2$ für lineare Unterräume $V_1, V_2 \subset V$ und $F(v_1 + v_2) = v_1$ für alle $v_1 \in V_1, V_2 \in V_2$.