Übungsblatt 12

Abgabe: Donnerstag, den 28.06.2018 vor der Vorlesung.
Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und Übungstermin.

Aufgabe 12.1

In der Vorlesung haben wir für endlichdimensionales V den zu $F \in \mathrm{End}(V)$ adjungierten Endomorphismus über die Gleichung

$$\langle F(v), w\rangle = \langle v, F^{\mathrm{ad}}(w)\rangle \qquad \forall v, w \in V$$

definiert. Zeigen Sie, dass F^{ad} wohldefiniert und eindeutig ist. (Tipp: Haben Sie genutzt, dass V endlichdimensional ist?)

Aufgabe 12.2

Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung von euklidischen Vektorräumen V, W mit den jeweiligen Skalarprodukten $\langle ., .\rangle_V$, $\langle ., .\rangle_W$. Sei $G : W \to V$ eine beliebige Funktion für die gilt

$$\langle F(v), w\rangle_W = \langle v, G(w)\rangle_V \qquad \forall v \in V, w \in W.$$

Zeigen Sie, dass G linear ist. Welchen Namen würden Sie für G vorschlagen?

Aufgabe 12.3

Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum.

- Sei $F \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Zeigen Sie, dass $\langle F(v), v\rangle$ reell ist für alle $v \in V$.
- Sei $F \in \mathrm{End}(V)$ beliebig. Zeigen Sie, dass $F^{\mathrm{ad}}F = 0$ genau dann wenn $F = 0$.

Aufgabe 12.4

Seien $F, G \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungierte Endomorphismen.

- Dann ist $F \circ G$ selbstadjungiert, genau dann wenn $F \circ G = G \circ F$.
- Ist F zusätzlich nilpotent so folgt $F = 0$.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 12.5

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren für die reelle symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bonusaufgabe (2 Bonuspunkte)

Sei $A : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & 1 & 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die folgenden Matrizen sind die Zeilenstufenformen von A und A^T:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die Dimension des Bildes von A und geben Sie eine Basis an.
- Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Bildes von A^T.
- Schreiben Sie den Kern von A als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit möglichst wenigen Gleichungen und geben Sie seine Dimension an.
- Geben Sie eine Basis des Kerns von A^T an.