# Übungsblatt 1

**Abgabe: Donnerstag, 11.4.2019 vor der Vorlesung.**

**Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.**

## Aufgabe 1.1

Eine Permutation $\sigma \in S_n$ heißt ein *$k$-Zyklus*, wenn es paarweise verschiedene Elemente $a_1, \dots, a_k \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit

$$\begin{aligned} \sigma(a_i) &= a_{i+1} \text{ für } i = 1, \dots, k-1, \\ \sigma(a_k) &= a_1, \end{aligned}$$

und $\sigma$ alle übrigen Elemente von $\{1, \dots, n\}$ fest lässt. Wir schreiben $\sigma = (a_1 \dots a_k)$. Dabei können die Elemente $a_1, \dots, a_k$ zyklisch vertauscht werden, d.h. für jedes $1 \leq l \leq k$ gilt $\sigma = (a_{l+1} \dots a_k a_1 \dots a_l)$.

Bestimmen Sie das Signum eines $k$-Zyklus.

## Aufgabe 1.2

Betrachte die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, $\sigma^{-1}$ und $\tau^{-1}$.

b) Schreiben Sie die Permutationen aus a) als Produkte von Transpositionen.

c) Berechnen Sie für jede der Permutationen aus a) das Signum.

d) *Zusatzaufgabe:* Schreiben Sie $\sigma$ und $\tau$ als Produkt möglichst langer Zyklen.

## Aufgabe 1.3

Bestimmen Sie aller Untergruppen von $S_3$. Welche dieser Untergruppen sind Normalteiler?

(Bitte umblättern!)

### Aufgabe 1.4

Sei $K$ ein Körper, $V$ ein $n$-dimensionaler $K$-Vektorraum und $U$ ein $k$-dimensionaler $K$-Untervektorraum von $V$. Sei $\Delta\colon V^n \to K$ eine Determinantenfunktion und seien $v_{k+1}, \ldots, v_n \in V$. Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned} \Delta_U\colon U^k &\to K, \\ (u_1, \ldots, u_k) &\mapsto \Delta(u_1, \ldots, u_k, v_{k+1}, \ldots, v_n), \end{aligned}$$

eine Determinantenfunktion auf $U$ definiert wird. Wann ist $\Delta_U$ nicht trivial?

### Aufgabe 1.5

Seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \geq 0$ und sei $\mathcal{A}$ die Fläche des von $a$ und $b$ aufgespannten Parallelogramms $\{\alpha a + \beta b \mid \alpha, \beta \in [0,1]\}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A} = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| .$$