Übungsblatt 2

Abgabe: Donnerstag, 18.4.2019 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 2.1

Sei $\Delta\colon V^n \to K$ eine nicht-triviale Determinantenfunktion auf einem n-dimensionalen Vektorraum und sei $v_1, \dots, v_{n-1}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in V. Zeigen Sie, dass es ein $v_n \in V$ mit $\Delta(v_1, \dots, v_n) = 1$ gibt, wobei die Restklasse von v_n in $V/\langle v_1, \dots, v_{n-1}\rangle$ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 2.2

Sei $n \in 2\mathbb{N} + 1$ und $A \in K^{n\times n}$ antisymmetrisch, d.h. $A^T = -A$. Zeigen Sie, dass $\det A = 0$.

Aufgabe 2.3

Bestimmen Sie die Determinanten der Elementarmatrizen $S_i(\lambda)$, $Q_i^j(\lambda)$ und P_i^j.

Aufgabe 2.4

Sei K ein Körper und seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Zeigen Sie, dass für die *Vandermonde'sche Determinante*

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

gilt

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i<j}} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Aufgabe 2.5

Für $d \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{Q}[x]_{\le d}$ den Vektorraum der Polynome mit rationalen Koeffizienten vom Grad höchstens d. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{Q}[x]_{\le 3} &\to \mathbb{Q}[x]_{\le 3}, \\ p &\mapsto p + p', \end{aligned}$$

wobei p' die Ableitung von p bezeichnet. Berechnen Sie $\det(F)$.