Übungsblatt 3

Abgabe: Donnerstag, 25.4.2019 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 3.1

Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem mittels der Cramer'schen Regel.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.2

Für $d \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{Q}[x]_{\leq d}$ den Vektorraum der Polynome mit rationalen Koeffizienten vom Grad höchstens d. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{Q}[x]_{\leq 2} &\to \mathbb{Q}[x]_{\leq 2}, \\ p &\mapsto p + p', \end{aligned}$$

wobei p' die Ableitung von p bezeichnet. Nutzen Sie die Cramer'sche Regel für die Darstellungsmatrix, um die Umkehrabbildung zu bestimmen.

Aufgabe 3.3

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Für ein $x \in V$ gelte $V = \langle x, F(x), \ldots, F^{n-1}(x) \rangle$. Seien $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in K$, sodass

$$F^n(x) = \lambda_0 x + \lambda_1 F(x) + \ldots + \lambda_{n-1} F^{n-1}(x).$$

Zeigen Sie, dass $\det(F) = (-1)^{n-1}\lambda_0$.

Aufgabe 3.4

Sei $A \in K^{n\times n}$ und sei $B = ((-1)^{i+j}a_{ij})$. Zeigen Sie, dass $\det A = \det B$.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 3.5

Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ und seien $A, B \in \mathcal{M}$. Ein *Weg* von A nach B in $\mathcal{M}$ ist eine stetig Abbildung

$$\phi = (\phi_{ij})\colon [0,1] \to \mathcal{M}$$

mit $\phi(0) = A$ und $\phi(1) = B$. Stetigkeit von ϕ bedeutet Stetigkeit der Komponentenabbildungen $\phi_{ij}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. $\mathcal{M}$ heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für alle $A, B \in \mathcal{M}$ einen Weg von A nach B in $\mathcal{M}$ gibt.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^{n\times n}$ wegzusammenhängend ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ nicht wegzusammenhängend ist.