Übungsblatt 4

Abgabe: Donnerstag, 2.5.2019 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 4.1

Zeigen Sie, dass ein nilpotenter Endomorphismus Null als einzigen Eigenwert hat.

Aufgabe 4.2

Sei V ein Vektorraum und F ein Endomorphismus von V. Zeigen Sie: Wenn $F^2 + F$ den Eigenwert -1 hat, dann hat F^3 den Eigenwert 1.

Aufgabe 4.3

Sei K ein Körper, sei $p \in K[t]$ ein Polynom, V ein K-Vektorraum und F ein Endomorphismus von V. Der Endomorphismus $p(F)$ wird durch formales Einsetzen von F in p gebildet, d.h. t^n wird durch $F^n = F \circ \ldots \circ F$ ersetzt ($F^0 = \mathrm{Id}$).

a) Sei λ ein Eigenwert von F. Zeigen Sie, dass $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(F)$ ist.

b) Seien $A, B \in K^{n\times n}$ ähnlich. Zeigen Sie, dass dann auch $p(A)$ und $p(B)$ ähnlich sind. Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 4.4

Zeigen Sie, dass die Spur einer Matrix eine Invariante unter Ähnlichkeit ist.
Genauer: Sei $\mathrm{sp}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ die Spur einer Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$. Dann gilt für jedes $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ die Gleichung $\mathrm{sp}(SAS^{-1}) = \mathrm{sp}(A)$.
Hinweis: Zeigen Sie die allgemeinere Aussage $\mathrm{sp}(AB) = \mathrm{sp}(BA)$ für beliebige Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$.

Aufgabe 4.5

Sei V ein Vektorraum und seien F und G Endomorphismen von V. Zeigen Sie:

a) Ist $v \in V$ ein Eigenvektor von $F \circ G$ zum Eigenwert λ und ist $G(v) \neq 0$, so ist $G(v)$ ein Eigenvektor von $G \circ F$ zum Eigenwert λ.

b) Ist V endlichdimensional, so haben $F \circ G$ und $G \circ F$ dieselben Eigenwerte.