Übungsblatt 5

Abgabe: Donnerstag, 9.5.2019 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 5.1

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie das charakteristische Polynom von A und entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 5.2

Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei F ein Endomorphismus von V. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_F \colon K[t] &\to \mathrm{End}(V), \\ P &\mapsto P(F), \end{aligned}$$

sowohl ein Ringhomomorphismus als auch ein K-Vektorraumhomomorphismus ist.

Aufgabe 5.3

Sei K ein Körper, sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und sei F ein Endomorphismus von V.

a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   1) Es existiert eine Basis von V, in der F diagonal ist und 0 und 1 die einzigen Einträge auf der Diagonalen sind.
   2) $V = \ker(F) \oplus \mathrm{Eig}(F, 1)$.

b) Sei $F^2 = F$. Zeigen Sie, dass dann die äquivalenten Bedingungen aus a) erfüllt sind.

c) *Bonus:* Welche Zerlegung von V folgt aus $F^3 = F$.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 5.4

Sei K ein Körper und seien $A, B \in K^{n\times n}$ mit $AB = BA$. Zeigen Sie: Wenn alle Eigenwerte von A und B einfach sind, dann haben A und B dieselben Eigenvektoren.

Aufgabe 5.5

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass die Determinante von A das Produkt der Eigenwerte und die Spur von A die Summe der Eigenwerte von A ist. Lässt sich diese Aussage (leicht modifiziert) auf reelle Matrizen übertragen?