Übungsblatt 6

Abgabe: Donnerstag, 16.5.2019 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 6.1

Betrachten Sie den Endomorphismus F des $\mathbb{Q}^2$, der in der Standardbasis durch die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben ist. Der Trigonalisierungssatz sagt, dass eine Basis $\mathcal{B}$ existiert, so dass $M_{\mathcal{B}}(F)$ obere Dreiecksform hat. Welche Wahlen werden im Beweis getroffen und wie beeinflussen diese die konkrete Form von $M_{\mathcal{B}}(F)$? Wann ist $M_{\mathcal{B}}(F)$ wieder diagonal? Können sie die Familie aller als $M_{\mathcal{B}}(F)$ vorkommenden oberen Dreiecksmatrizen beschreiben?

Aufgabe 6.2

Zeigen Sie, dass der Unterschied zwischen $\dim \operatorname{Eig}(F, \lambda)$ und $\mu(P_F, \lambda)$ in Lemma 4.3.2 beliebig groß werden kann, d.h. für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es einen Vektorraum V und einen Endomorphismus F von V, sodass $\mu(P_F, \lambda) - \dim \operatorname{Eig}(F, \lambda) \geq k$ für einen Eigenwert λ von F.
Hinweis: Die Dimension n von V muss wegen $\mu(P_F, \lambda) \leq n$ mit k wachsen.

Aufgabe 6.3

a) Zeigen Sie, dass $A \in K^{n \times n}$ genau dann diagonalisierbar ist, wenn A^T diagonalisierbar ist.

b) Sei V ein (nicht notwendig endlichdimensionaler) K-Vektorraum und F ein Endomorphismus von V, sodass jeder Vektor $0 \neq v \in V$ ein Eigenvektor von F ist. Zeigen Sie, dass es ein $\lambda \in K$ gibt, sodass $F = \lambda \operatorname{Id}$.

Aufgabe 6.4

Die *Fibonacci-Folge* (c_n) ist definiert durch $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ und $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für c_n an, der nur von n abhängt.
Hinweis: Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n+2} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$$

sowie eine Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, sodass $S^{-1}AS$ diagonal ist.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 6.5

Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K und seien $F\colon V \to V$, $G\colon W \to W$ und $H\colon V \to W$ lineare Abbildungen, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "H"'] & V \arrow[d, "H"] \\ W \arrow[r, "G"'] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert. Zeigen Sie:

a) Ist H injektiv, so ist jeder Eigenwert von F auch ein Eigenwert von G.

b) Ist H surjektiv, so ist jeder Eigenwert von G auch ein Eigenwert von F.