Übungsblatt 7

Abgabe: Donnerstag, 23.5.2019 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 7.1

a) Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie, dass R genau dann ein Körper ist, wenn R nur zwei Ideale besitzt.

b) Zeigen Sie, dass jedes Ideal I von $\mathbb{Z}$ von der Form

$$I = \langle n \rangle = n\mathbb{Z}$$

ist.

c) Ist der Ring $\mathbb{Z}[x]$ ein Hauptidealring?

Aufgabe 7.2

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom sowie das Minimalpolynom von A.

b) Lässt sich die Diagonalisierbarkeit von A mit a) entscheiden? Wenn ja, wie?

c) Bestimmen Sie die Eigenräume und Haupträume von A.

d) Lässt sich die Diagonalisierbarkeit von A mit c) entscheiden? Wenn ja, wie?

e) Schreiben Sie $A = D + N$ als Summe einer Diagonalmatrix D und einer nilpotenten Matrix N. Zeigen Sie, dass dann $DN = ND$.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 7.3

Sei F ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums V. Bestimmen Sie für die folgenden Fälle das Minimalpolynom von F:

a) $f = \mathrm{Id}_V$,

b) $f = 0$,

c) $V = V_1 \oplus V_2$ für Untervektorräume V_1 und V_2 von V und $f(v_1 + v_2) = v_1$ für alle $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

Aufgabe 7.4

Betrachten Sie die Verallgemeinerung der Exponentialfunktion für Matrizen: Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert

$$\exp(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i.$$

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $\exp(S^{-1}AS) = S^{-1}\exp(A)S$.

b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\exp(A)$.

Aufgabe 7.5

Sei $A \in K^{2\times 2}$ nicht invertierbar. Nutzen Sie den Satz von Cayley–Hamilton, um A^n zu bestimmen.